V OLIMPIADA FIZYCZNA (1955/1956). Stopień wstępny, zad. doświadczalne – D.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Kazimierz Rosiński: *Fizyka w szkole* nr 1, 1956;
Czarnecki Stefan: Olimpiady Fizyczne I – IV, PZWS, Warszawa 1956.

Nazwa zadania: Badanie zderzeń stalowych kulek.

Działy: Mechanika, dynamika.

Słowa kluczowe: zderzenie sprężyste, niesprężyste, zasada zachowania energii, pędu, tarcie, kulka stalowa.

Zadanie doświadczalne – D, zawody stopnia wstępnego, V OF.

Przygotuj trzy jednakowe kulki stalowe. Jedną z nich powlecz niezbyt grubą warstwą parafiny względnie innego materiału plastycznego. Następnie, pozostawiając jedną z kulek w spoczynku wpraw drugą w ruch postępowy dokładnie w kierunku kuli spoczywającej tak, by nastąpiło ich zderzenie. Zaobserwuj wynik zdarzenia zarówno w przypadku dwu kul jednakowych, jak i w przypadku, gdy jedna kula jest powleczona parafiną, druga zaś nie. Zaobserwuj również, jak zależy przebieg rozpatrywanego zjawiska od masy kulki i od prędkości, przy jakiej następuje zderzenie.

Jaką rolę odgrywa wielkość tarcia, które w swym ruchu napotyka kulka?

Podaj wyjaśnienie obserwowanych zjawisk na podstawie znanych Ci praw fizycznych.

Opisz, jak przeprowadziłeś doświadczenie i w jaki sposób zmniejszyłeś do minimum czynniki zakłócające przebieg zjawiska. Jeśli możesz, powtórz doświadczenie, biorąc kulki o jednakowych promieniach wykonane z różnych materiałów.

Rozwiązanie

Najkorzystniejsze warunki doświadczenia daje zawieszenie kul na długich niciach jednakowej długości. Zderzenie się kul toczących się po stole wprowadza dodatkowy czynnik w postaci ruchu obrotowego kul. Czynnik ten należy pominąć; wpływ jego jest na ogół nieznaczny, zwłaszcza dla kul pełnych o dużej gęstości.

Jeśli zderzają się kule toczące się, to następuje zmiana energii kinetycznej nie tylko ruchu postępowego, ale i zmiana energii ruchu obrotowego, co wprowadza zazwyczaj niewielką wprawdzie poprawkę do bilansu energii, ale komplikuje rachunki. Poza tym przy uderzeniu następuje ocieranie się powierzchni, zwłaszcza przy zderzeniu kul toczących się w tym samym kierunku, co powoduje rozpraszanie energii. Zawieszenie na niciach jednakowej długości jest ponadto dlatego korzystniejsze, że daje nam lepszą gwarancję zderzeń centralnych.

A). Rozpatrzmy wpierw zderzenie kul stalowych, tzn. nie oblepionych parafiną; będzie to zderzenie sprężyste. Rozwiązanie przeprowadzimy stosując dwie najogólniejsze zasady fizyki: zasadę zachowania energii i zasadę zachowania pędu.

$$E_1 + E_2 = E_1' + E_2' \tag{1}$$

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2' \tag{2}$$

gdzie E_1, E_2, E_1', E_2'; p_1, p_2, p_1', p_2' oznaczają odpowiednio energie i pędy kuli uderzającej i uderzanej przed i po zderzeniu. Ponieważ rozpatrujemy zderzenia centralne, kierunek ruchu kul przed i po zderzeniu jest niezmienny i możemy pędy dodawać skalarnie.

A1). Napiszmy wyrażenia na energie kinetyczne i pędy w przypadku, gdy zderzają się kule o równej masie, przy czym jedna z nich jest w spoczynku: $E_2 = 0, p_2 = 0$

Równości (1) i (2) przyjmują postać

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_1^2=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_1^{'2}+\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_2^{'2} \tag{3}$$

$$m\cdot v=m\cdot v_1^{'}+m\cdot v_2^{'} \tag{4}$$

skąd
$$v_1^2=v_1^{'2}+v_2^{'2} \tag{3a}$$
oraz
$$v_1=v_1^{'}+v_2^{'}. \tag{4a}$$
Wstawiając (4a) do (3a), otrzymamy

$$v_1^{'}\cdot v_2^{'}=0$$

Ponieważ $v_1 > 0$ (kulka została przez nas wprawiona w ruch), nie może jednocześnie być i $v_1^{'}=0$ i $v_2^{'}=0$ nie może też kulka uderzająca poruszać się nadal z tą samą prędkością, a uderzona pozostawać w spoczynku, musiałoby bowiem następować przenikanie się kulek. A zatem

$$v_1^{'}=0$$

$$v_2^{'}=v_1$$

czyli kulka uderzana „przejęła" prędkość od uderzającej, uderzająca zaś „przejęła" spoczynek od uderzanej.

A2). Tak prosto przedstawia się sprawa, gdy masy obu kulek są równe. Zobaczymy, jak będzie w przypadku mas nierównych $m_1 + m_2$.

Równania (1) i (2) napiszemy teraz w postaci

$$\frac{1}{2}m_1\cdot v_1^2=\frac{1}{2}m_1\cdot v_1^{'2}+\frac{1}{2}m_2\cdot v_2^{'2}$$

$$m_1v_1=m_1v_1^{'}+m_2v_2^{'}$$

Oznaczając stosunek mas przez $k=\dfrac{m_2}{m_1}$ otrzymamy związki prostsze:

$$v_1^2=v_1^{'2}+k\cdot v_2^{'2}$$

$$v_1=v_1^{'}+k\cdot v_2^{'}$$

z których wyznaczamy niewiadome $v_1^{'}$ i $v_2^{'}$

$$v_1^{'}=v_1\cdot\frac{1-k}{1+k} \tag{5}$$

$$v_2^{'}=v_1\cdot\frac{2}{1+k} \tag{6}$$

Rozpatrzmy teraz następujące przypadki:

A_2 1) $k < 1$ (kulka uderzająca ma masę większą)

Na przykład, dla kulki uderzającej o dwukrotnie większej masie od uderzanej ($k=\dfrac{1}{2}$), otrzymamy

$$v_1^{'}=\frac{1}{3}\cdot v_1$$

$$v_2^{'}=1\frac{1}{3}\cdot v_1$$

Kulka uderzona porusza się po uderzeniu prędzej, niż przed zderzeniem kulka uderzająca.

Przeprowadzimy jeszcze rachunek dla $k = \frac{1}{10}$

$$v_1' = \frac{9}{11} \cdot v_1$$

$$v_2' = 1\frac{9}{11} \cdot v_1$$

Widzimy, że kiedy masa kulki uderzającej znacznie przewyższa masę uderzanej, wówczas prędkość uderzającej prawie się nie zmienia, natomiast uderzona porusza się z prędkością prawie dwukrotnie większą niż uderzająca. Ściśle można to wykazać, jeśli we wzorach (5) i (6) przejdziemy do granic dla $k \to 0$, wówczas

$$v_1' \to v_1 \tag{7}$$

$$v_2' \to 2 \cdot v_1 \tag{7'}$$

A$_2$. 2) $k > 1$ (kulka uderzająca jest lżejsza od uderzanej)

Na przykład: $k = 2$

$$v_1' = -\frac{1}{3} v_1$$

$$v_2' = \frac{2}{3} v_1$$

Na przykład: $k = 10$

$$v_1' = -\frac{9}{11} v_1$$

$$v_2' = \frac{2}{11} v_1$$

Na przykład: $k = \infty$

$$v_1' = -v_1 \tag{8}$$

$$v_2 = 0 \tag{8'}$$

Ostatni przypadek $k = \infty$ realizujemy uderzając piłką w nieruchomą ścianę – piłka odbije się z niezmienioną wartością prędkości, ściana zaś pozostanie nadal nieruchoma.

A3). Przypadek, w którym kulka uderzana porusza się z pewną prędkością, bądź „uciekając” od uderzającej, bądź wybiegając jej naprzeciw, nie jest zbyt ciekawy – mieści się on już w powyżej omówionych: następuje odpowiednia – rozpatrzona wyżej – zmiana obu prędkości. Czytelnik może sam napisać odpowiednie równania.

A4). Ciekawym natomiast zagadnieniem jest prześledzenie zachowania się energii kinetycznej i pędu w czasie zderzeń kulek o różnych masach. Rozważania takie mają pierwszorzędne znaczenie w fizyce atomowej.

Biorąc pod uwagę, że $E_1' = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1'^2$ i uwzględniając (5), otrzymujemy

$$E_1' = E_1 \cdot \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 \tag{9}$$

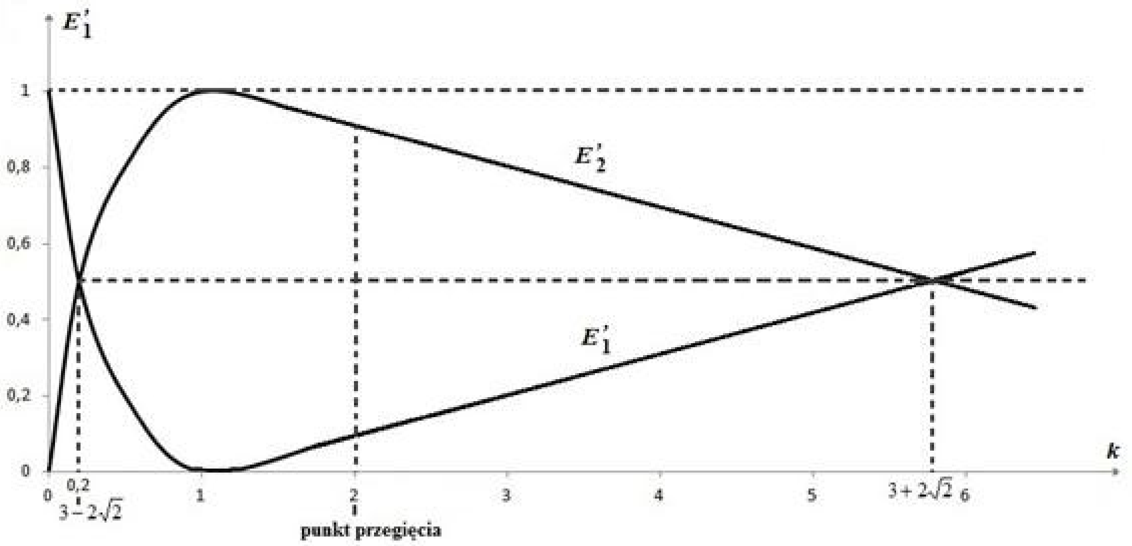
a wstawiając (6) mamy

$$E_2^{'} = \frac{1}{2} m_2 \cdot \upsilon_2^{'2} = \frac{1}{2} m_2 \cdot \upsilon_1^2 \frac{4}{(1+k)^2} = \frac{1}{2} m_1 \cdot \upsilon_1^2 \frac{4 \cdot k}{(1+k)^2} = E_1 \frac{4 \cdot k}{(1+k)^2}$$

przy czym ostatnie wyrażenie możemy zapisać w postaci

$$E_2^{'} = E_1 \frac{4}{k + \frac{1}{k} + 2} \tag{10}$$

Wyniki te przedstawimy graficznie na wykresie



Wykres 1.

Rysunek przedstawia E_1' i E_2' jako funkcje k. O energii E_1 założono, że jest stała i równa 1.

Z wykresów wynika, że jeśli kulka uderzana ma masę zbliżoną do masy uderzającej, to uzyskana przez nią energia kinetyczna jest porównywalna – choć mniejsza – z energią E_1. Natomiast zarówno kulka bardzo lekka, jak i bardzo ciężka, zabierają przy uderzeniu znikomo małą część energii kulki uderzającej.

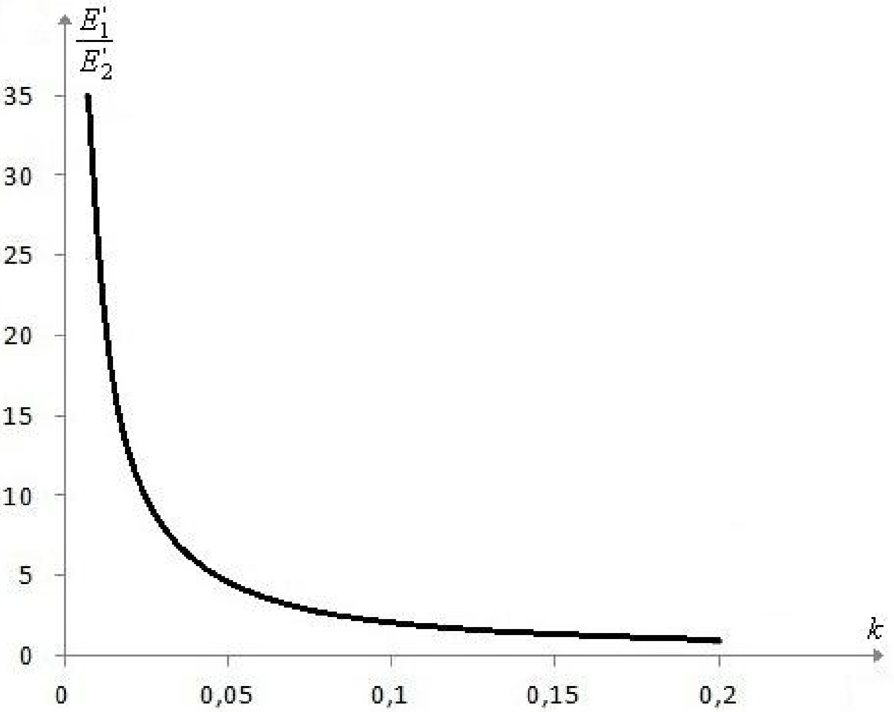
Przedstawmy jeszcze na wykresie stosunek energii kulki uderzającej i uderzanej po zderzeniu jako funkcje stosunku mas k

$$\frac{E_1^{'}}{E_2^{'}} = f(k)$$

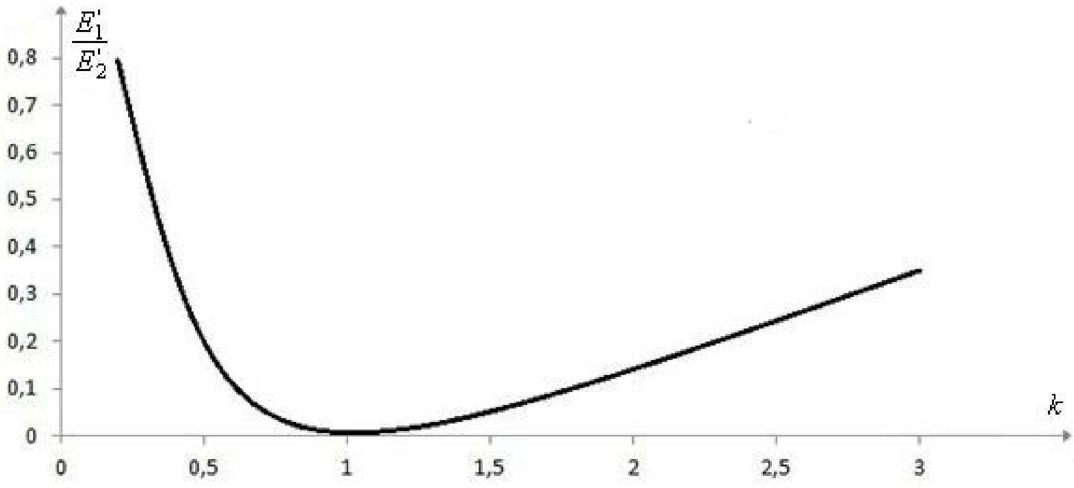
Z (9) i (10) otrzymamy

$$\frac{E_1^{'}}{E_2^{'}} = \frac{(1-k)^2}{4 \cdot k} \tag{11}$$

Zależność (11) przedstawiona jest na wykresach 2, 3 i 4. Ażeby pokazać wyraźnie przebieg tej zależności dla różnych zakresów wartości k, krzywą (11) rozbito na trzy odcinki. Z wykresu 2 widać, że jeśli kulka uderzana ma masę znacznie mniejszą od masy kulki uderzającej to prawie całą energię zabiera ze sobą kulka uderzająca,ale rozdział energii pomiędzy kulki gwałtownie zmienia się na rzecz energii kulki uderzanej w miarę wzrostu stosunku mas k.



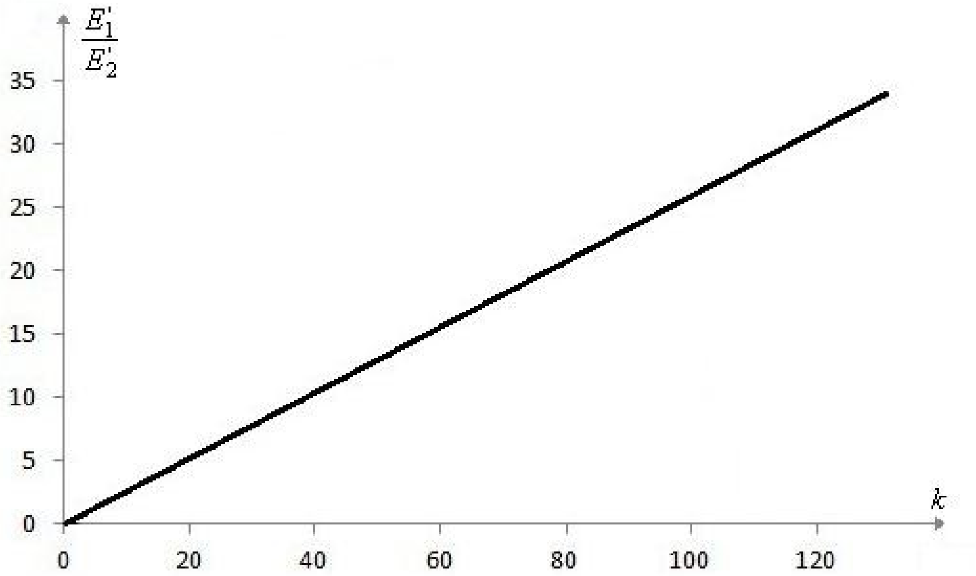
Wykres 2.



Wykres 3.

Rozdział jest „sprawiedliwy” – energia rozdziela się po połowie na obie kulki dla k = 0,18 (dokładnie dla $k = 3 - 2\sqrt{2}$, co widać także z wykresu 1). Z wykresu 3 widać, że rozdział energii staje się „korzystniejszy” dla kulki uderzanej i wreszcie przy równych masach (k = 1) całą energię zabiera kulka uderzana ($\frac{E_1'}{E_2'} = 0$); gdy masa kulki uderzanej staje się większa od masy kulki uderzającej, proces rozdziału energii biegnie w przeciwnym kierunku – coraz większa część energii zabiera znów kulka uderzająca. Dla wartości $k = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5{,}82$ (wykres 4 i 1) osiągamy znów rozdział energii „sprawiedliwy” – po połowie na każdą kulkę. Następnie – jak widać z wykresu 4 – gdy masa kulki uderzanej jest znacznie większa od masy kulki uderzającej, całą prawie energię zachowuje kulka uderzająca.

Podajmy dla przykładu, ze jeśli kulka uderzana jest bądź lżejsza, bądź cięższa stokrotnie od uderzającej, to przekazana jej energia kinetyczna wyniesie w obu przypadkach zaledwie 4% energii kulki uderzającej.



Wykres 4.

A5). Zobaczymy teraz, jak wymieniać się będą pędy zderzających się kul.
Z (5) i (6) mamy

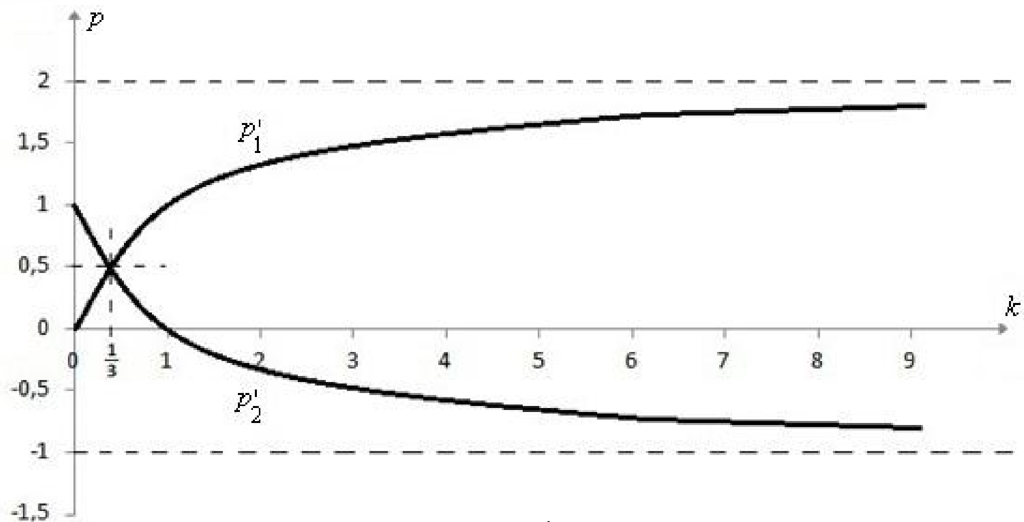
$$p_1' = p_1 \frac{1-k}{1+k} \tag{12}$$

$$p_2' = m_2 \cdot v_1 \frac{2}{1+k} = m_1 \cdot v_1 \frac{2 \cdot k}{1+k}$$

czyli ostatecznie

$$p_2' = p_1 \frac{2 \cdot k}{1+k} \tag{13}$$

Dla małych k, czyli w przypadku ciężkiej kulki uderzającej, pęd jej ulega nieznacznym zmianom; mały też pęd zostaje przekazany kulce uderzanej – lekkiej.



Wykres 5.

Dla dużych wartości k, czyli w przypadku lekkiej kulki uderzającej, pęd jej ulega dużym zmianom i staje się ujemny w stosunku do pierwotnego.

Jeśli założymy – jak przy rozpatrywaniu energii – stałą masę i prędkość pierwotną kulki uderzającej, to przy wzroście masy kulki uderzanej rośnie pęd jej przekazywany, jak i zmiana pędu kulki uderzającej. Wyniki ilustruje wykres krzywej (12). W skrajnym przypadku bardzo ciężkich kulek uderzanych zabierają one podwójny pęd, odbijając od siebie kulkę lekką jak od ściany.

W oparciu o rozważania dotyczące przekazywania energii i pędu przy zderzeniu zrozumiały staje się fakt wielokrotnych zderzeń elektronów z ciężkimi jonami, w których to zderzeniach elektrony znacznie zmieniają swe pędy, natomiast prawie niezmienne pozostają ich energie kinetyczne.

B). W przypadku zderzenia się kul, z których jedna (przynajmniej) pokryta jest ciałem niesprężystym, na przykład parafiną, zderzenie jest niesprężyste, kulki nie odskoczą, lecz przylepią się do siebie po zderzeniu i będą stanowić jeden wspólny układ.

Zasada zachowania pędu przybierze wówczas postać:

$$m_1 \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v'$$

gdzie v' jest wspólną prędkością obu kulek po zderzeniu,
skąd

$$v' = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} \tag{14}$$

Zasada zachowania energii wyrazi się wzorem

$$E_1 = E_{1,2} + E_0$$

gdzie $E_{1,0}$ jest energią kinetyczną układu zlepionych kulek, a E_0 jest energią odkształcenia niesprężystego.

Uwzględniając (14), otrzymamy

$$E_0 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot \frac{m_1^2 \cdot v_1^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

skąd

$$E_0 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 \cdot \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

czyli

$$E_0 = E_1 \cdot \frac{k}{1+k}$$

gdzie

$$k = \frac{m_2}{m_1}. \tag{15}$$

Ze wzoru (15) widzimy, że dla $k \gg 1$, tzn. w przypadku gdy kulka o małej masie uderza kulkę o dużej masie, cała prawie energia kinetyczna tej kulki zamienia się na energię odkształcenia. Przeciwnie – w wypadku $k \ll 1$ – energia odkształcenia E_0 jest bardzo mała. W przypadkurówności obu kulek ($m_1 = m_2$) z (14) i (15) widzimy, że wartość wspólnej prędkości będzie równa połowie wartości prędkości początkowej; energia kinetyczna rozłoży się na dwie równe części – na energię odkształcenia i energię kinetyczną układu obu kulek.