V OLIMPIADA FIZYCZNA
(1955/1956)
ZAWODY III STOPNIA
CZĘŚĆ DOŚWIADCZALNA

Zadanie doświadczalne – D

Nazwa – Kondensator rozładowujący się przez opór

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej
– Kazimierz Rosiński: *Fizyka w Szkole nr 6*, 1956
– Janusz Ostrowski: *Olimpiady Fizyczne V i VI.* PZWS, Warszawa 1963
– T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Dane są:

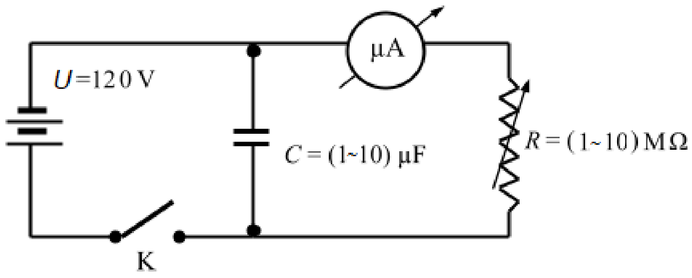
- bateria dająca znane napięcia,
- kondensator,
- różne oporniki o znanych oporach,
- galwanometr,
- przełącznik,
- sekundomierz.

1) Zaprojektuj schemat (wykonując odpowiedni rysunek) i zmontuj obwód pozwalający naładować kondensator, a następnie, po odpowiednim przełączeniu, rozładuj go przez znany opór.
2) Zbadaj zmiany natężenia prądu rozładowania w zależności od czasu dla różnych napięć, do jakich był naładowany kondensator.
3) Zbadaj, jak zależy początkowy prąd rozładowania od włączonego oporu.

Otrzymane wyniki przedstaw również graficznie. Na podstawie pomiarów drugiego punktu zadania wywnioskuj, jak zmienia się nabój na kondensatorze w zależności od napięcia, do jakiego kondensator był naładowany.

Rozwiązanie zadania D – V OF, III stopień, część doświadczalna

Kondensator naładujemy, jeśli do jego okładek podłączymy napięcie z baterii; natomiast rozładowywać będziemy łącząc jego okładki przez opornik.



Rys. 1. Schemat układu doświadczalnego

Zamykając klucz ładujemy kondensator. Naładowanie całkowite następuje w ciągu drobnego ułamka sekundy, niemniej jednak klucz trzymać należy zamknięty tak długo (parę sekund), aż ustali się wskazanie mikroamperomierza. Kondensator (przy zamkniętym kluczu) stale rozładowuje się przez opór R – galwanometr mierzy prąd rozładowania.
Otwierając klucz rozładowujemy kondensator. Przy oporach około 10 MΩ = 10^7 Ω i pojemności kondensatora 1 µF = 10^{-6} F rozładowanie trwa około 30 sekund, zatem nie zdołamy w ciągu jednego rozładowania dokonać wielu odczytań jednocześnie na sekundomierzu i galwanometrze. Wobec tego dokonujemy kilku naładowań i rozładowań, „pokrywając punktami” za każdym razem inną część krzywej rozładowania $I(t)$. Na osi rzędnych odkładamy wartość natężenia prądu rozładowania, na osi odciętych – czas w sekundach.
Podajemy przykładowo tabele pomiaru dla $U = 120$ V; $C = 4,9$ µF; $R = 1,2$ MΩ (wartości przybliżone).

t, s	0	3	6	9	12	15	18	21
I, µA	100,00	60,00	36,00	21,60	13,00	7,80	4,70	2,82

Zauważmy, że jeżeli wartości czasu dobierzemy tak, że utworzą ciąg arytmetyczny rosnący, to odpowiednie wartości prądu utworzą malejący ciąg geometryczny.

t, s	0	3	6	9	12	15
I, µA	$100 \cdot 1,67^0$	$100 \cdot 1,67^{-1}$	$100 \cdot 1,67^{-2}$	$100 \cdot 1,67^{-3}$	$100 \cdot 1,67^{-4}$	$100 \cdot 1,67^{-5}$

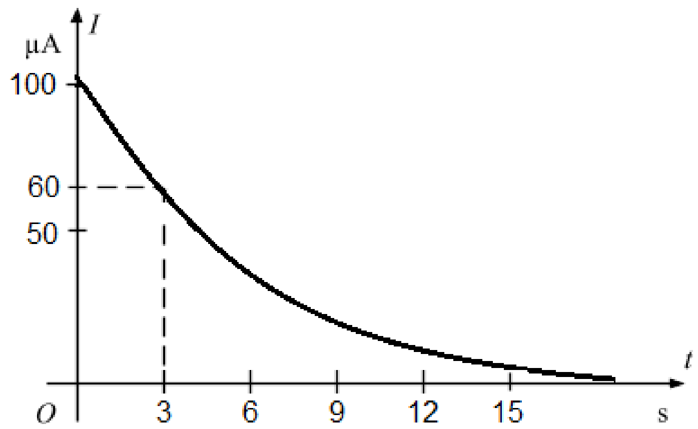
Zależność $I(t)$ możemy wyrazić wzorem:

$$I(t) = I_0 a^{\frac{t}{r}} = 100 \cdot 0,6^{\frac{t}{3}} \tag{1}$$

lub

$$I(t) = I_0 \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{r}{t}} = 100 \cdot 1,67^{-\frac{t}{3}} \tag{2}$$

Oczywiście wystarczyło, aby uczniowie wykonali pomiar i wykreślili funkcję $I(t)$.



Rys. 2. Funkcja $I(t)$

Zatrzymajmy się jednak trochę nad zależnościami (1) i (2) wyrażającymi szczególny przypadek funkcji wykładniczej. (Funkcję wykładniczą nazywamy funkcję postaci $y = a^x$, gdzie $a > 1$). Nie o postać analityczną nam tu jednak głownie chodzi, ale o pewną bardzo ważną cechę tej funkcji, mianowicie o to, że zmiany tej funkcji, na przykład przyrosty odpowiadające stałym przyrostom zmiennej niezależnej x są wprost proporcjonalne od odpowiedniej wartości samej funkcji. Ten typ zależności jest niezwykle często spotykany. Na przykład przyrosty ludności miasta są tym większe, im większa jest liczba ludności. Drzewo w okresie „równomiernego" wzrostu przyrasta tym więcej, im jest wyższe. Przyrost długości pręta wskutek ogrzewania jest tym większy, im pręt jest dłuższy; sprężyna wydłuży się wskutek obciążenia tym więcej, im jest dłuższa (przy stałym współczynniku sprężystości). Ciała promieniotwórcze tym mniej emitują cząstek (np. α) tzn. tym mniej ubywa atomów promieniotwórczych, im mniej jest substancji promieniotwórczej. Typ zależności, o której mówimy, pozostanie zasadniczo ten sam, jeśli będziemy rozpatrywać funkcje malejące; analitycznie wyrazi się to ujemnym wykładnikiem:

$$y = b^{-x},$$

gdzie $x > 0$, $b > 1$.

Według tego prawa rozładowuje się kondensator: zmniejszanie się prądu rozładowania jest tym mniejsze, im mniejszy jest sam prąd:

$$\Delta I = -c \cdot I$$

lub

$$\Delta I \sim -I,$$

gdzie $c > 0$ jest dowolnym współczynnikiem proporcjonalności.

W naszym przypadku:

$$\Delta I = -40;\ -24;\ -14;\ -9;\ -6;$$
$$I = 100;\ 60;\ 36;\ 22;\ 13;\ 7,$$

więc

$$c = 0,4.$$

Zatem prąd rozładowania naszego kondensatora można wyrazić wzorem:

$$\Delta I = 0,4I.$$

Analityczne zależności, o których mówiliśmy, a które wyrażaliśmy w różny sposób:

$$y = a^x,$$
$$y = b^{-x},$$
$$\Delta I = c \cdot I$$

można wyrazić bardziej jednolicie.
Wiemy, (co łatwo wykazać), że

$$a^n = b^{n \log_b a}$$

dla $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$.
Zatem wszystkie funkcje wykładnicze o różnych podstawach możemy sprowadzić do funkcji wykładniczej o jednej umownej podstawie.

Przedstawimy obecnie sposób znalezienia tej umownej podstawy nazwanej podstawą logarytmów naturalnych - liczby, która odgrywa w matematyce i fizyce bardzo ważną rolę.
Wyobraźmy sobie pręt o długości początkowej y_0 i niespotykanie dużym współczynniku cieplnej rozszerzalności liniowej $\alpha = 1/10$ (wybieramy tak duży współczynnik w celu uproszczenia rachunków).

Przyrost długości Δy są - jak wiemy - proporcjonalne do długości początkowej y_0; długość pręta po ogrzaniu o t stopni wyraża znany wzór:

$$y(t) = y_0(1 + \alpha t), \tag{3}$$

a więc dla $y_0 = 1$, $\alpha = \frac{1}{10}$, $t = 10$°C mamy:

$$y(10) = 2. \tag{4}$$

Zdajemy sobie jednak sprawę, że wzór (3) jest przybliżony, bowiem przy ogrzewaniu pręta o 1°C do 2°C początkową długością jest już nie $y_0 = 1$, lecz

$$y(1) = 1 + \frac{1}{10} = 1,1.$$

Zatem

$$y(2) = y(1)\left(1 + \frac{1}{10}\right) = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^2 = 1,21, \tag{5}$$

a nie jakby wynikało ze wzoru (3):

$$y(2) = \left(1 + \frac{1}{10} \cdot 2\right) = 1,20.$$

Rozumując analogicznie, dochodzimy do wniosku, że przy ogrzaniu o 10°C uwzględniając kolejne długości dla 1°C, 2°C, 3°C, . . . , 9°C, otrzymamy:

$$y(10) = y(9)\left(1 + \frac{1}{10}\right) = y_0\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2,59, \tag{6}$$

a więc wartość znacznie większą od (4).
Ściślejszy zatem wzór na długość pręta po ogrzaniu o t stopni Celsjusza, przybierze postać:

$$y(t) = y_0(1 + \alpha)^t. \tag{7}$$

Zdajemy sobie jednak sprawę, że i ten wzór nie jest zupełnie ścisły, bowiem nawet przy ogrzewaniu od 0,1°C do 0,2°C długością początkową jest już nie y_0, lecz $y\left(\frac{1}{10}\right)$, a przy ogrzewaniu od 0,2°C do 0,3°C początkową długością jest $y\left(\frac{2}{10}\right)$. Zgodnie z wyjściowym wzorem (3) będziemy mieli

$$y\left(\frac{1}{10}\right) = \left(1 + \alpha \cdot \frac{1}{10}\right), \tag{8}$$

a więc analogicznie do (5) będzie

$$y\left(\frac{2}{10}\right) = \left(1 + \alpha \cdot \frac{1}{10}\right)^2, \tag{9}$$

a przy ogrzaniu do 10°C

$$y(10) = y\left(\frac{100}{10}\right) = \left(1 + \alpha \cdot \frac{1}{10}\right)^{100} = 2,70. \tag{10}$$

Wartość ta jest jeszcze większa niż (6).
Jeszcze ściślejszy zatem wzór na długość pręta po ogrzaniu o t przybierze postać:

$$y(t) = y_0\left(1 + \frac{\alpha}{10}\right)^{10t}.$$

Oczywiście i ten wzór jest przybliżony, jakkolwiek jest ściślejszy od (7).
Postępując dalej w ten sposób, dzielilibyśmy stopień na 100 części, 1000 części itd. i otrzymywalibyśmy coraz ściślejsze wzory, ale nadal proces obliczania przyrostu byłby „skokowy", tzn. obliczałoby się długość następną w oparciu o poprzednią, obliczoną dla temperatury niższej o skończoną wartość, np. o 1/10 000 . Otóż, aby otrzymać wzór zupełnie ścisły, należałoby brać nieskończenie małą różnicę temperatur, ale wówczas, aby otrzymać długość pręta np. dla 10°C, należałoby podnieść wyrażenie w nawiasie do nieskończenie wielkiej potęgi. W naszym przykładzie dla $y_0 = 1$, $\alpha = \frac{1}{10}$, $t = 10$°C napisalibyśmy: $y(10)$ równa się granicy, do której dąży wyrażenie

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

gdy $n \to \infty$ lub używając specjalnej symboliki:

$$y(10) = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^\infty.$$

Otóż – jak to można dowieść stosując metody analizy matematycznej – granica wyrażenia

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

dla $n \to \infty$ istnieje i wyraża się liczbą niewymierną $\mathrm{e} = 2,718\ 28\ldots$.
Zatem w naszym przypadku długość pręta po ogrzaniu do 10°C wyniesie

$$y(10) = \mathrm{e} = 2,718\ 28\ldots.$$

Ogólny ścisły wzór na długość pręta po ogrzaniu o t ma postać:

$$y(t) = y_0\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{nt}_{n\to\infty} = y_0 e^{\alpha t}.$$

Zupełnie analogiczną postać mamy w przypadku rozładowania kondensatora, z tą tylko różnicą, że występuje tu funkcja wykładnicza malejąca

$$y = y_0 \cdot \mathrm{e}^{-cx},$$

gdzie $c > 0$. Czasami używa się też oznaczenia:

$$\mathrm{e}^{-cx} = \exp(-cx)$$

W naszym przypadku zależność prądu rozładowania od czasu rozładowywania, a więc (1) i (2) można napisać w postaci:

$$I = 100 \cdot \exp(t/5,88). \tag{11}$$

Otóż można dowieść ogólnie, że zależność prądu rozładowania kondensatora o pojemności C przez opór R od czasu wyraża wzór:

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}. \tag{12}$$

Ze wzoru (12) widzimy, że o prędkości, z jaką rozładowuje się kondensator, decyduje iloczyn jego pojemności i oporu, przez jaki następuje rozładowanie.
Wielkość $R \cdot C$ nosi nazwę „stałej czasowej" obwodu – jej wymiarem jest $[R \cdot C] = \mathrm{s}$.
Wracając do punktu 2 naszego zadania, przekonujemy się doświadczalnie, że im do niższego napięcia naładujemy kondensator, tym słabszy będzie płynął prąd rozładowania, a więc, na przykład, po 12 s będzie nie 13 µA, lecz $13 \cdot U_2/U_1$, gdzie U_1 i U_2 oznaczają napięcia, do jakich naładowano kondensator za pierwszym razem i za drugim. Natomiast zależność rozładowania od czasu będzie niezmieniona, bowiem niezmieniona pozostaje stała czasowa $R \cdot C$ danego obwodu. Na przykład dla 60 V mamy:

t, s	0	6	12	18
I, µA	50,0	18,0	6,5	2,4
	$50 \cdot 1,67^0$	$50 \cdot 1,67^{-1}$	$50 \cdot 1,67^{-2}$	$50 \cdot 1,67^{-3}$

A więc, na przykład, w obu przypadkach po upływie 5,88 s wartość prądu zmaleje $2,7^{-1}$-krotnie, czyli do wartości$100 \cdot 2,7^{-1}$ µA = 37µA lub $50 \cdot 2,7^{-1}$ µA = 18,5µA.
Posługując się wzorem (12), możemy rozwiązać zadanie znalezienia czasu, po upływie którego wartość prądu zmaleje, na przykład, do połowy swej wartości pierwotnej - maksymalnej.
Kładziemy warunek:

$$I = \frac{1}{2} I_0,$$
$$\frac{1}{2} I_0 = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}.$$

Skąd, logarytmując obie strony, otrzymujemy kolejno

$$\log \frac{1}{2} = -\frac{t}{RC} \log \mathrm{e},$$
$$\log 2 = \frac{t}{RC} \log 2,7,$$
$$t = RC \frac{2}{2,7} = 5.88 \cdot \frac{0,3010}{0,4343} \approx 4.$$

Do wartości 0,01 wartość prądu zmaleje po upływie:

$$t = 5,88 \cdot \frac{2}{0,4343} = 27.$$

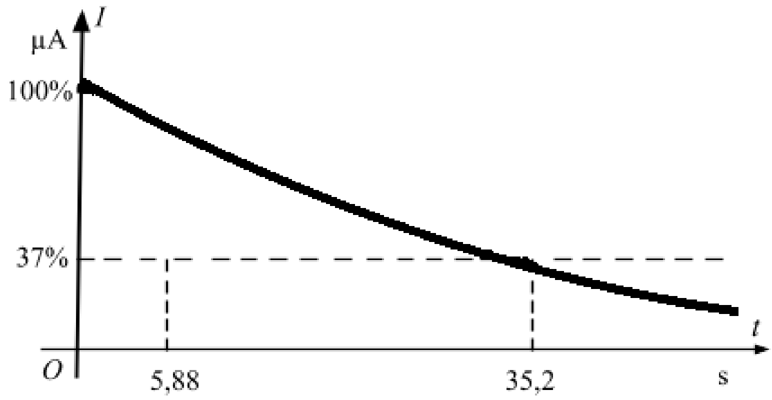
Ogólnie do wartości $\frac{1}{n}$ maleje po upływie czasu t_n:

$$t_n = RC\frac{\log n}{\log \mathrm{e}} = \frac{5,88}{0,4343} \log n, \tag{13}$$

a więc np.:

$$t_{10\ 000} = \frac{5,88 \cdot 4}{0,4343} = 540.$$

Tak wzór (13), jak i wzory (1), (2), (11) i (12) wskazują, że, teoretycznie rzecz ujmując, kondensator całkowicie nie rozładuje się nigdy – praktycznie jednak już po kilkudziesięciu sekundach będziemy go traktowali jako całkowicie rozładowany.
Pomiar prądu rozładowania przez różne opory R lub też kondensatorów o różnych pojemnościach C daje w wyniku przebiegi potwierdzające ogólny wzór (12). A więc im większy jest iloczyn, czyli stała czasowa, tym powolniej rozładowuje się kondensator. Na przykład, dla $U = 120$ V, $R = 3,6$ MΩ, $C = 9,8$ μF, $R \cdot C = 35,2$ s, a więc kiedy stała czasowa jest 6 – krotnie większa niż w przypadku omawianym wyżej, rozładowanie kondensatora, jak pokazuje rysunek, jest znacznie powolniejsze.



Rys. 3. Rozładowywanie kondensatora.

To, że czas rozładowania kondensatora do określonej wartości, na przykład do połowy, jest proporcjonalny do iloczynu, można łatwo zrozumieć. Niech t_0 oznacza czas (praktycznie) całkowitego rozładowania. Określony nabój elektryczny Q spływać będzie tym dłużej, im mniejszy będzie prąd rozładowania, który z kolei jest odwrotnie proporcjonalny do oporu zewnętrznego, przez który następuje rozładowanie (prawo Ohma); zatem im większy opór, tym dłuższy czas przepływu ładunku: $t_0 \sim R$. Z drugiej strony im większa pojemność kondensatora C przy danym potencjale, tym większy gromadzi się na nim ładunek Q; zatem znów $t_0 \sim C$, skąd $t_0 \sim RC$.