



**L OLIMPIADA FIZYCZNA**  
(2000/2001)  
**ZAWODY I STOPNIA**  
**CZEŚĆ TEORETYCZNA**

**Zadanie teoretyczne – T1**

**Nazwa** – Moment bezwładności jednorodnego trójkąta.

**Źródła** – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej

– Marek Trippenbach<sup>1</sup>, Krzysztof Karpierz<sup>2</sup>: *Fizyka w szkole* nr 1, 2001, s. 46

– Paweł Janiszewski<sup>3</sup>, Jan Mostowski<sup>4</sup> (red.): *50 lat olimpiad fizycznych.*

*Wybrane zadania z rozwiązaniami*, WN PWN, Warszawa 2002, zad. 63, s. 34, 137-138

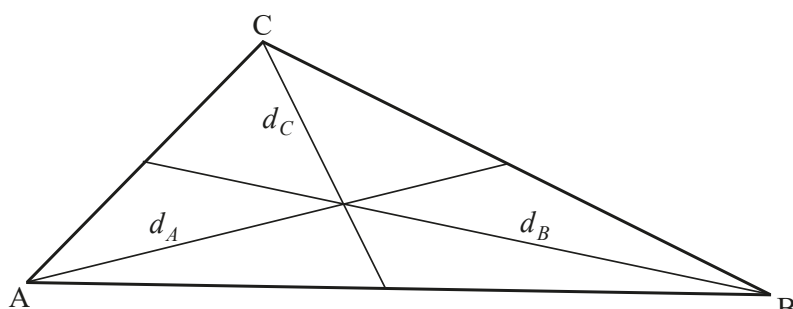
– T.M. Molenda, IF US, [www.OF.szc.pl](http://www.OF.szc.pl).

---

Udowodnij, że moment bezwładności jednorodnego trójkąta względem osi do niego prostopadłej i przechodzącej przez środek masy wyraża się wzorem

$$I_0 = (1/27)m(d_A^2 + d_B^2 + d_C^2),$$

gdzie  $d_A$ ,  $d_B$  i  $d_C$  oznaczają długości środkowych tego trójkąta, przedstawionego na rysunku, a  $m$  jego masę.



Rys. 1

---

<sup>1</sup>Marek Trippenbach (dr – wówczas) był sekretarzem naukowym ds. zadań teoretycznych w KGOF od L do LIV OF; współautor artykułów w *Fizyce w Szkole* z L i LI OF (przyp. red.).

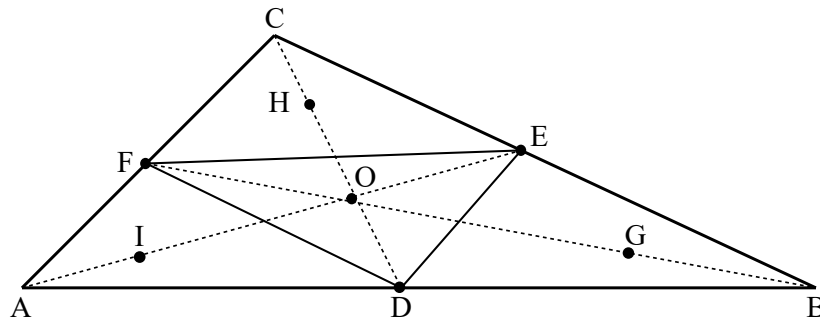
<sup>2</sup>Dr Krzysztof Karpierz był sekretarzem naukowym ds. zadań doświadczalnych w KGOF w OF: XLI, XLII, L i LI, w tym okresie był współautorem/autorem części artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF (przyp. red.).

<sup>3</sup>Dr Paweł Janiszewski – Kierownik Organizacyjny Olimpiady Fizycznej od XLII OF do LVIII OF; w tym okresie był autorem artykułów w *Fizyce w Szkole* (do czasu ich publikowania w tym czasopiśmie, tj. do LV OF), dot. informacji o przebiegu i wynikach olimpiad fizycznych; współautorem ww. książki z zadaniami. (przyp. red.).

<sup>4</sup>Prof. dr hab. Jan Mostowski był sekretarzem naukowym ds. zadań w KGOF od XXXVIII OF do XXXIX OF, od L OF do LX pełnił funkcję Przewodniczącego KGOF a od LXIX – wiceprzewodniczący KGOF; był autorem artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF, współautorem ww. książki z zadaniami. (przyp. red.).

### Rozwiązanie zadania T1 – L OF, I stopień, część teoretyczna

Środek masy jednorodnego trójkąta leży w punkcie przecięcia środkowych jego boków. Oznaczmy środki boków kolejno:  $AB — D$ ,  $BC — E$  oraz  $CA — F$ . Punkt przecięcia środkowych oznaczmy przez  $O$  tak jak na rys. 2. Dodatkowo, zgodnie z oznaczeniami z treści zadania,  $CD = d_C$ ,  $AE = d_A$  oraz  $BF = d_B$ .



Rys. 2

Poszukiwany moment bezwładności  $I_0$  względem punktu  $O$  znajdziemy korzystając z podobieństwa trójkątów oraz twierdzenia Steinera. Ponieważ odcinki  $AD$  i  $DB$ ,  $BE$  i  $EC$  oraz  $AF$  i  $FC$  są parami równe, zatem trójkąty  $ADF$ ,  $BED$ ,  $FEC$  i  $DEF$  są przystające i podobne do trójkąta  $ABC$ . Ich rozmiary liniowe są o połowę mniejsze od rozmiarów  $ABC$ , a ich masy są równe  $m/4$ . Ich momenty bezwładności względem ich własnych środków ciężkości są równe  $I_0/16$ , co w prosty sposób wynika ze skalowania. Te środki ciężkości oznaczono na rysunku literami  $G$ ,  $H$ ,  $I$  oraz  $O$ .

Teraz obliczymy moment bezwładności trójkątów  $ADF$ ,  $BED$  i  $FEC$  względem punktu  $O$ . Rozważmy na przykład trójkąt  $FEC$ . Jego moment bezwładności względem  $O$  jest równy (z twierdzenia Steinera)

$$\frac{I_0}{16} + \frac{m|HO|^2}{4}.$$

Z drugiej strony łatwo wykazać, że  $|HO| = d_C/3$ . Rzeczywiście z podobieństwa trójkątów  $ABC$  i  $FEC$  otrzymujemy, że  $|CH| = |CO|/2$ , a z podobieństwa  $ABC$  i  $DEF — |DO| = |CO|/2$ . Teraz już możemy, korzystając z addytywności momentów bezwładności, obliczyć poszukiwany moment bezwładności

$$I_0 = 4 \frac{I_0}{16} + \frac{m}{4} \left( \frac{d_A^2}{9} + \frac{d_B^2}{9} + \frac{d_C^2}{9} \right).$$

Po przekształceniu dostajemy wzór podany w zadaniu, tj.

$$I_0 = \frac{1}{27} m (d_A^2 + d_B^2 + d_C^2).$$

#### Punktacja

1. Zauważenie podobieństw trójkątów ..... 2 pkt.
2. Związek pomiędzy momentami bezwładności trójkątów  
ABC i ADF, BED, FEC, DEF ..... 3 pkt.
3. Zastosowanie twierdzenia Steinera ..... 3 pkt.
4. Otrzymanie ostatecznego wzoru ..... 2 pkt.