



L OLIMPIADA FIZYCZNA

(2000/2001)

ZAWODY I STOPNIA

CZEŚĆ TEORETYCZNA

Zadanie teoretyczne – T2

Nazwa – Obliczenie mocy cieplnej prądów wirowych w metalowym walcu w zmiennym polu magnetycznym.

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej

– Marek Trippenbach¹, Krzysztof Karpierz²: *Fizyka w szkole* nr 1, 2001, s. 46

– T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

W jednorodnym polu magnetycznym $B = B_0 \sin \omega t$ znajduje się metalowy walec o promieniu r i długości l ($l \gg r$). Oś walca jest równoległa do kierunku pola B . Opór właściwy metalu jest równy ρ . Względna przenikalność magnetyczna jest równa 1.

- a) Oblicz średnią moc cieplną wydzielaną przez prądy wirowe. Efekt samoindukcji można zaniedbać.

Wskazówka: oblicz najpierw średnią moc wydzielaną w cienkim pierścieniu walcowym zawartym między promieniami x oraz $x + dx$, a następnie wykonaj sumowanie (całkowanie) po wszystkich pierścieniach.

- b) Jaki warunek muszą spełniać parametry walca, aby założenie o pominięciu efektów samoindukcji było prawdziwe?

Wskazówka: porównaj wartość indukcji pola B_{wir} (pochodzącego od prądów wirowych) w punkcie leżącym na osi walca z polem B .

- c) Czy rzeczywista (wynikająca z efektu samoindukcji) wartość wydzielonej mocy jest większa, czy mniejsza od obliczonej w punkcie a)?

¹Marek Trippenbach (dr – wówczas) był sekretarzem naukowym ds. zadań teoretycznych w KGOF od L do LIV OF; współautor artykułów w *Fizyce w Szkole* z L i LI OF (przyp. red.).

²Dr Krzysztof Karpierz był sekretarzem naukowym ds. zadań doświadczalnych w KGOF w OF: XLI, XLII, L i LI, w tym okresie był współautorem/autorem części artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF (przyp. red.).

Rozwiązanie zadania T2 – L OF, I stopień, część teoretyczna

a) Zmienne pole magnetyczne wytwarza prądy wirowe, których linie są okręgami leżącymi w płaszczyźnie prostopadłej do linii pola B . Podzielmy nasz walec na pierścienie walcowe zawarte między promieniami o długościach x i $x + dx$. Pierścień o promieniu x obejmuje strumień pola magnetycznego równy $\pi x^2 B$. Siła elektromotoryczna indukcji jest proporcjonalna do zmiany tego strumienia w czasie

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi x^2 B_0 \omega \cos \omega t.$$

Opór pierścienia jest wprost proporcjonalny do oporu właściwego i obwodu pierścienia oraz odwrotnie proporcjonalny do pola przekroju poprzecznego i wyraża się wzorem

$$R = \frac{2\pi\rho x}{l dx}.$$

Obliczmy uśrednioną po czasie moc cieplną wydzielaną przez prądy wirowe w naszym pierścieniu. Wynosi ona

$$\langle P \rangle = \left\langle \frac{\mathcal{E}^2}{R} \right\rangle = \frac{\pi x^3 B_0^2 \omega^2 l dx}{2\rho} \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{\pi x^3 B_0^2 \omega^2 l dx}{4\rho}.$$

Skorzystalismy tu ze wzoru $\cos^2 \alpha = 1/2 + 1/2 \cos(2\alpha)$ oraz z tego, że $\langle \cos(2\omega t) \rangle = 0$. Aby otrzymać całkowitą moc wydzielaną w walcu trzeba tylko zsumować (scałkować) wkłady pochodzące od wszystkich pierścieni. Ponieważ $\int_0^r x^3 dx = r^4/4$, to średnia moc prądów wirowych jest równa

$$P = \frac{\pi r^4 B_0^2 \omega^2 l}{16\rho}.$$

b) Podobnie jak w poprzednim punkcie podzielimy walec na pierścienie. Natężenie prądu w pierścieniu ograniczonym promieniami x i $x + dx$ jest równe (patrz pkt. a)

$$dI = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B_0 l \omega x \cos(\omega t) dx}{2\rho}.$$

Indukcja pola pochodząca od prądu dI , płynącego w tym pierścieniu, wynosi

$$dB_{\text{wir}} = \mu_0 \frac{dI}{l} = \frac{\mu_0 B_0 \omega x \cos \omega t dx}{2\rho}.$$

Całkowite natężenie pola pochodzącego od wirów B_{wir} jest równa całce od 0 do r , czyli

$$B_{\text{wir}} = \int_0^r dB_{\text{wir}} = \int_0^r \frac{\mu_0 B_0 \omega x \cos(\omega t) dx}{2\rho} = \frac{\mu_0 B_0 \omega \cos(\omega t) r^2}{4\rho}.$$

Aby można było pominąć wpływ samoindukcji, B_{wir} powinno być znacznie mniejsze od B , co sprowadza się do warunku

$$\mu_0 r^2 \omega \ll \rho.$$

c) Zgodnie z regułą Lenza pole magnetyczne prądów wirowych osłabia zmiany pola zewnętrznego i w konsekwencji powoduje zmniejszenie natężenia prądów wirowych oraz zmniejszenie ilości wydzielanego ciepła.

Punktacja

1. Poprawne rozwiązanie a) 5 pkt.
2. Wyprowadzenie warunku b) 3 pkt.
3. Poprawna odpowiedź na pytanie c) 2 pkt.