L OLIMPIADA FIZYCZNA

(2000/2001)

ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Zadanie doświadczalne – D

Nazwa – Ramka w polu magnetycznym

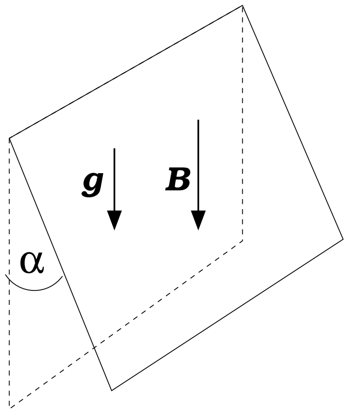
Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej
– Andrzej Wysmołek, sekretarz naukowy ds. zad. teoret. KGOF, IFD UW
– Paweł Janiszewski, Jan Mostowski (red.): *50 lat olimpiad fizycznych. Wybrane zadania z rozwiązaniami.* WN PWN, Warszawa 2002
– T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Zadanie T3 - L OF, II stopień

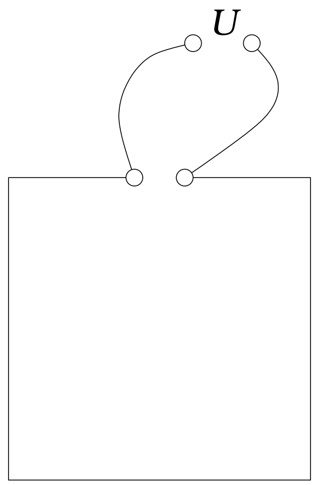
Kwadratowa ramka o boku L jest zbudowana z cienkich jednorodnych prętów, z których każdy ma masę m i opór elektryczny R. Ramkę umieszczono w pionowym, jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B w ten sposób, że może się ona obracać bez tarcia wokół poziomej osi pokrywającej się z jednym z jej boków (rys. 1). Rozpatrz następujące sytuacje:

A) W obwód ramki włączono źródło stałego napięcia zewnętrznego U (rys. 2). Wyznacz położenie równowagi, czyli kąt odchylenia ramki od pionu.

B) Zewnętrzne źródło napięcia usunięto i zwarto końce tak, że ramka stanowi obwód zamknięty. Następnie ramkę odchylono od pionu i puszczono swobodnie. Oblicz po jakim czasie amplituda drgań zmaleje do połowy. Przyjmij, że opór R jest duży (słabe tłumienie i zaniedbywalny wpływ samoindukcji), a amplituda drgań jest mała (przypadek małych drgań).



Rys. 1



Rys 2.

Wskazówka 1. Równanie ruchu ciała drgającego w obecności siły oporu proporcjonalnej do prędkości:

$$ma = -kx - bv, \tag{1}$$

ma dla $b < 2\sqrt{km}$ rozwiązanie w postaci:

$$x(t) = x_0 \exp(-\lambda t)\, \sin(\omega t + \phi), \tag{2}$$

gdzie $\lambda = b(2m)$ oraz $\omega = \sqrt{km - \lambda^2}$, a x_0 i ϕ są wyznaczone przez warunki początkowe.

Wskazówka 2. Moment bezwładności jednorodnego pręta o masie m i długości L, względem osi obrotu prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego koniec wynosi $I_0 = \frac{1}{3}mL^2$.

Rozwiązanie zadania T3 - L OF, II stopień

A) Oznaczmy przez α kąt odchylenia ramki od pionu. Położenie równowagi możemy wyznaczyć z warunku równości momentu siły grawitacyjnej oraz momentu siły z jaką pole magnetyczne działa na ramkę. Moment siły ciężkości względem osi obrotu jest sumą momentów sił działających na trzy niezamocowane ramiona ramki. Moment siły ciężkości działający na prostopadłe do osi obrotu ramię ramki jest taki, jakby siła zaczepiona była w środku ciężkości, a więc $\frac{1}{2}Lmg\sin\alpha$. Moment siły ciężkości działający na równoległe do osi obrotu ramię ramki wynosi $Lmg\sin\alpha$. A więc całkowity moment siły ciężkości działający na ramkę wynosi

$$M_{\mathrm{g}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1\right) Lmg\sin\alpha = 2Lmg\sin\alpha. \tag{3}$$

Aby obliczyć moment siły, z jaką pole magnetyczne działa na ramkę znajdźmy najpierw natężenie prądu elektrycznego płynącego w obwodzie ramki. Z prawa Ohma znajdujemy

$$J = \frac{U}{4R}. \tag{4}$$

Moment siły działającej na przewodnik równoległy do osi obrotu (prostopadły do pola magnetycznego) wynosi

$$M_B = L^2 JB\cos\alpha. \tag{5}$$

Moment siły działającej łącznie na oba prostopadłe do osi obrotu boki ramki wynosi zero. Położenie równowagi wyznaczone jest przez równość momentów sił M_{g} i M_B, a więc

$$2Lmg\sin\alpha = L^2 B\frac{U}{4R}\cos\alpha. \tag{6}$$

Ostatecznie

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{LBU}{8mgR}. \tag{7}$$

B) Moment bezwładności ramki względem osi pokrywającej się z górnym bokiem jest sumą momentów bezwładności poszczególnych elementów. Moment bezwładności ramienia równoległego do osi obrotu wynosi mL^2. Ze wskazówki 2 wiemy, że moment bezwładności każdego z prętów prostopadłych do osi obrotu jest równy $\frac{1}{3}mL^2$, a więc całkowity moment bezwładności jest równy

$$I = \frac{5}{3}mL^2. \tag{8}$$

Moment siły ciężkości, jak pokazaliśmy w poprzednim punkcie, w przybliżeniu małych wychyleń jest równy

$$M_{\mathrm{g}} = 2mgL\sin\alpha \cong 2mgL\alpha. \tag{9}$$

W tej sytuacji inna jest fizyczna przyczyna pojawienia się prądu elektrycznego w obwodzie ramki. Powstaje on w wyniku zmiany strumienia pola magnetycznego przechodzącego przez powierzchnię ramki. Jeśli ramka nachylona jest pod kątem α do pionu, strumień ten wynosi

$$\Phi = L^2 B\sin\alpha \cong L^2 B\alpha, \tag{10}$$

gdzie, podobnie jak poprzednio, użyliśmy przybliżenia małych kątow. Zmiana strumienia pola magnetycznego wynosi więc

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = L^2 B\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}. \tag{11}$$

Ta zmiana strumienia pola magnetycznego indukuje w obwodzie ramki prąd elektryczny równy

$$J = \frac{BL^2}{4R}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}. \tag{12}$$

Podstawiając teraz tę wartość natężenia prądu do wyprowadzonego w poprzednim punkcie wyrażenia na moment siły M_B otrzymujemy w przybliżeniu małych wychyleń

$$M_B = \frac{L^4B^2}{4R}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}. \tag{13}$$

Skorzystamy teraz z równania ruchu obrotowego ramki pod wpływem obliczonych powyżej momentów sił

$$I\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = M_\mathrm{g} + M_B. \tag{14}$$

Wstawiając wartość momentu bezwładności oraz momentów sił dostajemy

$$\frac{5}{3}mL^2\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -2mgL\alpha - \frac{L^4B^2}{4R}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}. \tag{15}$$

Jest to właśnie równanie ruchu ciała drgającego w obecności siły oporu proporcjonalnej do prędkości. Zatem zgodnie ze wskazówką 1 znajdujemy wartość λ

$$\lambda = 3L^2B^2(40mR). \tag{16}$$

Obecność pola magnetycznego prowadzi więc do zmniejszania amplitudy drgań ramki. Ponieważ λ jest odwrotnie proporcjonalne do R, a więc tłumienie jest małe dla dużych wartości R. Jeśli początkowo amplituda drgań była równa α_0, to po czasie t jej wartość wyniesie $\alpha_0 \exp(-\lambda t)$, zgodnie ze wskazówką. Dwukrotne zmniejszenie amplitudy nastąpi po czasie τ, takim że $\exp(-\lambda\tau) = \frac{1}{2}$. A więc $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$. W rozwiązaniu pominęliśmy efekty samoindukcji, co jest uzasadnione dla dużych wartości R.