

LI OLIMPIADA FIZYCZNA

(2001/2002)

ZAWODY II STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Zadanie teoretyczne – T3

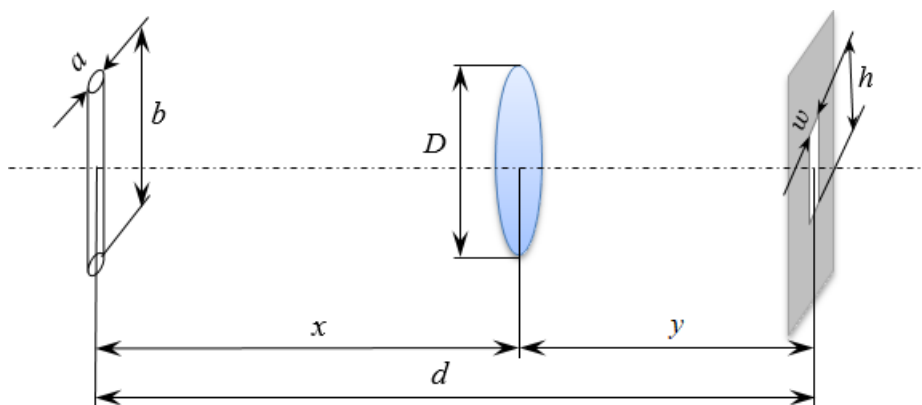
Nazwa – Badanie źródła światła w układzie soczewka spektrometr.

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej

– Marek Trippenbach*, Andrzej Wyszomłek: *Fizyka w Szkole 2/2002*

– T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Aby zbadać widmo źródła światła, na przykład rurki ze świecącym gazem, wiązkę światła z tego źródła kieruje się na szczelinę wejściową spektrometru. Ze względu na ograniczoną czułość tego przyrządu ważne jest, by możliwie duża część promieniowania wyemitowanego przez źródło trafiła do spektrometru. Ponieważ nie zawsze jest możliwe ustawienie źródła światła tuż przed szczeliną, pomiędzy źródłem a przyrządem ustawia się soczewkę skupiającą, której zadaniem jest wytworzenie obrazu źródła w płaszczyźnie szczeliny i zwiększenie w ten sposób mocy światła przechodzącego przez nią. Rozważ układ przedstawiony na rysunku. Rozciągnięte źródło światła o mocy $P_0 = 10$ mW ma kształt rurki o średnicy $a = 1$ mm i wysokości $b = 25$ mm. Ustawione jest ono w odległości d od szczeliny spektrometru. Pomiedzy źródłem a spektrometrem umieszczona jest soczewka skupiająca o średnicy $D = 30$ mm i ogniskowej $f = 30$ mm. Soczewka daje ostry obraz źródła na szczelinie.



Rys. 1

a) Wyznacz odległość d_{\max} źródła światła od szczeliny oraz odległość y_{\max} soczewki od szczeliny, przy których moc światła przechodzącego przez szczelinę jest największa. Wyznacz tę maksymalną wartość mocy. Przyjmij, że szczelina ma kształt prostokąta o wymiarach $w = 0,1$ mm i $h = 2$ mm. Jej dłuższy bok jest równoległy do osi rurki. Uwzględnij też warunek, że spektrometr działa poprawnie, gdy rozmiar pionowy obrazu jest nie mniejszy, niż wysokość szczeliny h .

b) Przeprowadź analizę zależności wyznaczonej maksymalnej mocy P_{\max} od parametrów opisujących soczewkę, czyli od D i f . Przyjmij, że rozkład natężenia promieniowania można uznać za izotropowy (taki jak od źródła punktowego).

*dr hab. Marek Trippenbach – sekretarz naukowy ds. zadań teoretycznych w KGOF (od 50 OF do 53 OF).

Rozwiązanie zadania T3 — LI OF, II stopień, część teoretyczna

a) Moc światła padającego na powierzchnię soczewki możemy wyrazić wzorem

$$P' = P_0 \frac{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}{4\pi x^2} = P_0 \frac{D^2}{16x^2}, \quad (1)$$

gdzie x to odległość źródła światła od soczewki. Taka sama jest więc moc światła tworzącego obraz źródła w płaszczyźnie szczeliny. Zatem natężenie światła w płaszczyźnie szczeliny wynosi

$$I = P_0 \frac{D^2}{16x^2} \cdot \frac{1}{a'b'}, \quad (2)$$

gdzie a' , b' – odpowiednie rozmiary obrazu.

Moc promieniowania przechodzącego przez szczelinę wynosi

$$P = \begin{cases} Ihw & \text{dla } a' \geq w \\ Iha' & \text{dla } a' < w. \end{cases} \quad (3)$$

Z treści zadania wynika, że $b/a > h/w$, co oznacza, że również w przypadku $a' < w$ może być spełnione $b' > h$, co jest warunkiem poprawnej pracy urządzenia.

Aby obraz powstawał na szczelinie, z równania soczewki, odległość y soczewki od szczeliny musi być równa

$$y = \frac{fx}{x-f} \quad (4)$$

i wówczas $a' = pa$, $b' = pb$, gdzie p oznacza powiększenie obrazu:

$$p = \frac{y}{x} = \frac{f}{x-f}. \quad (5)$$

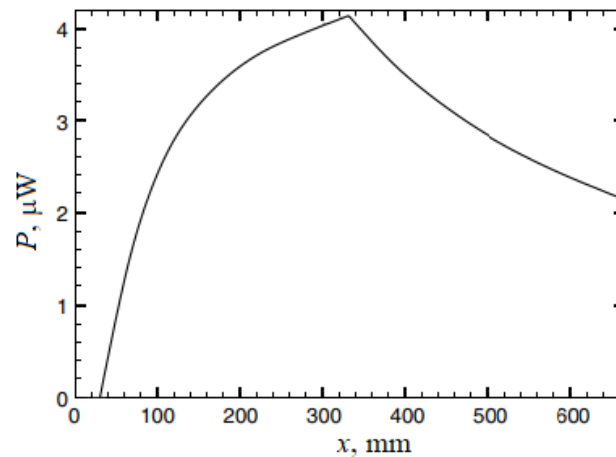
Wstawiając otrzymane wyniki do wyrażenia na P dostajemy:

$$P = \frac{P_0}{16ab} \left(\frac{D}{f}\right)^2 \left(1 - \frac{f}{x}\right) h \times \begin{cases} \left(1 - \frac{f}{x}\right) w & \text{dla } f < x \leq f\left(1 + \frac{a}{w}\right) \\ \frac{f}{x} a & \text{dla } x > f\left(1 + \frac{a}{w}\right) \end{cases}. \quad (6)$$

Moc P jest funkcją odległości x . Należy znaleźć maksimum tej funkcji. Porównując wyrażenia zawarte w nawiasie klamrowym widać, że są one równe w punkcie rozgraniczającym obszary ich obowiązywania. Wyrażenie odpowiadające mniejszym wartościom x jest rosnącą funkcją x , podczas gdy wyrażenie odpowiadające większym x jest malejącą funkcją x . Oznacza to, że maksimum tej funkcji znajduje się w punkcie granicznym

$$x_{\max} = f\left(1 + \frac{a}{w}\right). \quad (7)$$

Przykładowy wykres funkcji $P(x)$ (dla danych liczbowych podanych w zadaniu) jest przedstawiony na rys. 2.



Rys. 2

Optymalna odległość soczewki od szczeliny jest równa:

$$y_{\max} = \frac{f x_{\max}}{x_{\max} - f} = f \left(1 + \frac{w}{a} \right). \quad (8)$$

Optymalna odległość źródła światła od szczeliny wynosi więc

$$d_{\max} = x_{\max} + y_{\max} = f \left(2 + \frac{a}{w} + \frac{w}{a} \right). \quad (9)$$

Dla wartości podanych w zadaniu $y_{\max} = 33$ mm, $d_{\max} = 363$ mm.

Maksymalna wartość P :

$$P_{\max} = \frac{P_0}{16ab} \left(\frac{D}{f} \right)^2 h w \left(\frac{a}{a+w} \right)^2 \approx 4,13 \mu\text{W}. \quad (10)$$

b) Maksymalna moc światła przechodząca przez szczelinę zależy od ilorazu D/f (tak zwanej apertury numerycznej soczewki). Aby uzyskać dużą moc maksymalną należy użyć soczewki o możliwie dużym stosunku D/f (o dużej aperturze numerycznej).

Punktacja

1. Za obliczenie mocy światła przechodzącego przez szczelinę soczewki (wzór 3) 3 pkt.
2. Za wzór soczewkowy, powiększenie obrazu (wzory 4, 5) 1 pkt.
3. Za wyrażenie mocy poprzez parametry soczewki (wzór 6) 2 pkt.
4. Za wyznaczenie ekstremum (wzór 7 i 8) 1 pkt.
5. Za obliczenie optymalnej odległości źródła światła od szczeliny wraz z wartościami liczbowymi (wzór 9) 1 pkt.
6. Za poprawny wynik końcowy (wzór 10) wraz z wynikiem liczbowym 1 pkt.
7. Za dyskusję w punkcie b) 1 pkt.