LII OLIMPIADA FIZYCZNA

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Źródła:

– Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
– Andrzej Dragan, sekretarz naukowy ds. zad. teo. KGOF, IFT UW;
– *Fizyka w szkole* nr 3, 2003;
– T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

ZADANIE T1

Wewnątrz satelity poruszającego się po orbicie geostacjonarnej umieszczono układ dwóch małych, identycznych kulek o masie dużo większej od masy łączącego je sztywnego pręta. Układ może swobodnie obracać się wokół nieruchomego względem satelity środka pręta. Znajdź położenia równowagi układu kulek i pręta. Wyznacz okres małych drgań układu w płaszczyźnie orbity wokół położenia równowagi.

Uwaga: Siły grawitacji działające na obie kulki nie są równe, możesz jednak przyjąć, że są równoległe.

Wskazówka: Dla małych wartości x można stosować przybliżenie:

$$\frac{1}{(1+x)^2} \approx 1 - 2x. \tag{1}$$

ROZWIĄZANIE

Zadanie rozwiążemy w układzie spoczynkowym satelity. Układ ten jest nieinercjalny, należy więc uwzględnić występujące w nim siły bezwładności.

Ponieważ obie kulki znajdują się w różnych odległościach od Ziemi, więc jedna z nich jest przyciągana mocniej. Pojawia się zatem pewien moment sił grawitacyjnych M_g względem osi przechodzącej przez środek pręta i prostopadłej do płaszczyzny ruchu, dążący do ustawienia pręta wzdłuż promienia orbity. Ponieważ odległość l między kulkami jest dużo mniejsza niż promień orbity r, zachodzi

$$M_g \approx GMm \left(\frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\cos\alpha\right)^2} - \frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\cos\alpha\right)^2} \right) \frac{l}{2} \sin\alpha, \tag{2}$$

gdzie M jest masą Ziemi, m masą każdej z kulek, natomiast α kątem między prętem a odcinkiem łączącym środek Ziemi ze środkiem pręta. Korzystając ze wskazówki, otrzymujemy

$$M_g \approx -\frac{GMml^2}{r^3} \sin\alpha\cos\alpha. \tag{3}$$

Na układ kulek i pręta działają ponadto siły odśrodkowe. Ich moment M_o wynosi:

$$M_o \approx m\Omega^2 \left(r - \tfrac{l}{2}\cos\alpha\right) \frac{l}{2}\sin\alpha - m\Omega^2 \left(r + \tfrac{l}{2}\cos\alpha\right) \frac{l}{2}\sin\alpha \tag{4}$$

$$= -\frac{ml^2\Omega^2}{2} \sin\alpha\cos\alpha, \tag{5}$$

gdzie Ω jest częstością kołową obiegu Ziemi przez satelitę. Ponieważ

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}, \tag{6}$$

możemy zapisać także

$$M_g \approx -ml^2\Omega^2 \sin\alpha\cos\alpha. \tag{7}$$

Siła Coriolisa działa w płaszczyźnie ruchu, prostopadle do prędkości poruszającego się ciała (czyli wzdłuż pręta), dlatego w konsekwencji nie daje wkładu do całkowitego momentu siły M_c działającego na układ kulek. Moment ten wynosi zatem

$$M_c = -\frac{3}{2}\, ml^2\Omega^2 \sin\alpha\cos\alpha. \tag{8}$$

Położenia równowagi układu kulek wyznaczamy z warunku $M_c = 0$, otrzymując

$$\alpha = 0 \quad \text{lub} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Częstość małych drgań wokół pierwszego położenia równowagi możemy wyznaczyć, przybliżając $\sin\alpha \approx \alpha$ oraz $\cos\alpha \approx 1$. Wtedy

$$M_c \approx -\frac{3}{2}\, ml^2\Omega^2\alpha. \tag{10}$$

Ponieważ moment bezwładności układu

$$I = \frac{ml^2}{2}, \tag{11}$$

więc częstość drgań wynosi

$$\omega = \sqrt{3}\,\Omega, \tag{12}$$

a ich okres

$$t = \frac{T}{\sqrt{3}}, \tag{13}$$

gdzie T jest okresem obiegu Ziemi przez satelitę geostacjonarnego.

Podstawiając $T = 24\,\mathrm{h}$, otrzymujemy

$$t = 13{,}9\,\mathrm{h}. \tag{14}$$

Natomiast równowaga w położeniu

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \tag{15}$$

nie jest stabilna i małe drgania wokół niego nie są możliwe. Aby się o tym przekonać, podstawmy $\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta$ do wzoru na M_c:

$$M_c = \frac{3}{2}\, ml^2\Omega^2 \cos\beta\sin\beta \approx \frac{3}{2}\, ml^2\Omega^2\beta. \tag{16}$$

Moment sił dąży do zwiększania się wychylenia układu z tego położenia równowagi, co świadczy o niestabilności.