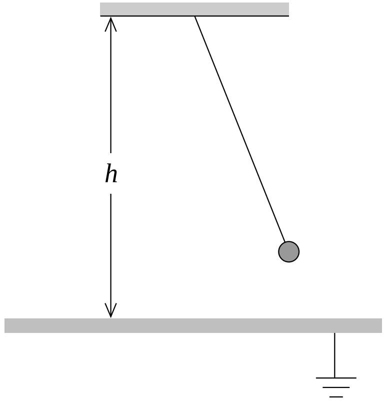
Zadanie T2

W odległości h od nieskończonej, przewodzącej i uziemionej płaszczyzny zaczepiono wahadło matematyczne z kulką o pewnej masie i ładunku elektrycznym — rysunek 2. Dla jakiej długości wahadła okres wahań będzie największy? Pomiń wpływ pola grawitacyjnego.

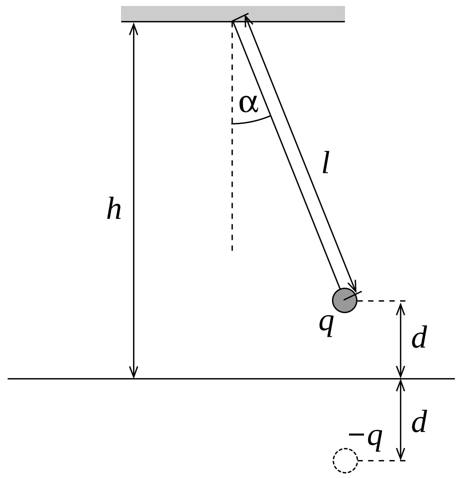


rys. 2

Rozwiązanie zadania T2

Siła działająca na kulkę jest siłą elektrostatyczną (zakładamy, że kulka porusza się na tyle wolno, że możemy stosować przybliżenie elektrostatyczne) pochodzącą od układu ładunków wyindukowanych na płaszczyźnie.

W przypadku czysto statycznym, pole elektryczne tuż nad powierzchnią przewodnika powinno być do niej prostopadłe. Ten warunek bedzie spełniony, jeśli pole od ładunków wyindukowanych będzie takie, jak pole pochodzące od ładunku obrazowego, znajdującego się pod płaszczyzną, rys. 3. Zatem siła przyciągania (przyciągania, bo ładunek obra-



rys. 3

zowy ma przeciwny znak, niż ładunek rzeczywisty) płaszczyzny i kulki jest równa sile przyciągania kulki i jej obrazu:

$$F = \frac{kq^2}{(2d)^2}, \tag{1}$$

gdzie d jest odległością kulki od płaszczyzny, q – jej ładunkiem, a $k = 1/(4\pi\varepsilon_0$.

Znając siłę, możemy napisać równanie ruchu wahadła o długości l:

$$ml^2\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{kq^2}{4d^2}l\sin\alpha = -\frac{kq^2 l}{4(h - l\cos\alpha)^2}\sin\alpha, \tag{2}$$

gdzie m jest masą kulki, a α – kątem odchylenia wahadła od pionu. Stosując przybliżenie małych drgań (w tym przypadku sprowadza się ono do przyjęcia $\sin\alpha \approx \alpha, \cos\alpha \approx 1$) otrzymujemy okres drgań wahadła:

$$T = \frac{4\pi}{q}\sqrt{\frac{ml}{k}}(h-l). \tag{3}$$

Jest on maksymalny dla

$$l = \frac{h}{3}. \tag{4}$$

Punktacja
Wzór (1) lub równoważny .... 3 pkt.
Wzór (2) lub równoważny (dopuszczalne jest również zastosowanie przybliżeń przed jawnym wypisaniem równania ruchu) .... 3 pkt.
Wzór (3) .... 2 pkt.
Wzór (4) .... 2 pkt.