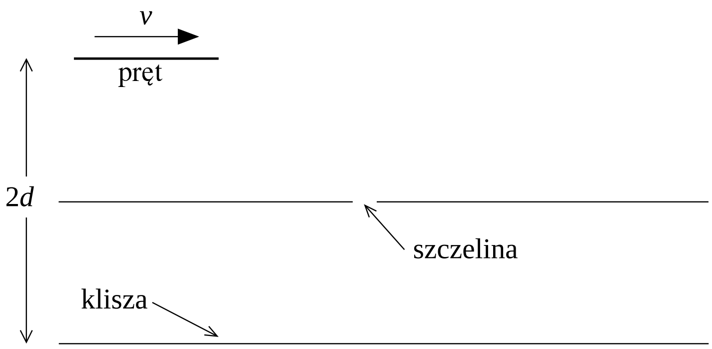
Zadanie T3

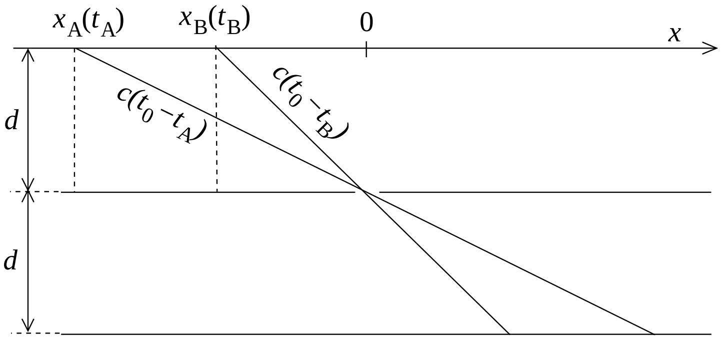
Pręt o długości spoczynkowej $l = 1\,\mathrm{m}$ porusza się z relatywistyczną prędkością $v = 0.9c$ (c — prędkość światła) wzdłuż swojej osi, w odległości $2d = 2\,\mathrm{m}$ od nieruchomej kliszy fotograficznej — rysunek 4. W połowie odległości między prętem a kliszą znajduje się przesłona z wąską szczeliną, która otwiera się na bardzo krótko w chwilach $t_1 = -1\mathrm{s}$ i $t_2 = 1\mathrm{s}$. Jakie będą długości pręta zarejestrowane na kliszy na kolejnych zdjęciach? Przyjmij, że w chwili $t = 0$ tylny koniec pręta znajdował się dokładnie nad przesłoną.



rys. 4

Rozwiązanie zadania T3

Wprowadźmy nieruchomą względem przesłony oś x, która pokrywa się z prostą, wzdłuż której porusza się pręt i przyjmijmy, że początek tej osi znajduje się dokładnie nad szczeliną w przesłonie (rys. 5). W chwili t, ze względu na skrócenie Lorentza, współrzędne



rys. 5

$x_{\mathrm{A}}(t)$ i $x_{\mathrm{B}}(t)$ końców pręta A i B na nieruchomej osi x dane są zależnościami:

$$x_{\mathrm{A}}(t) = vt \ , \tag{1}$$

$$x_{\mathrm{B}}(t) = vt + l\gamma \ , \tag{2}$$

gdzie $\gamma = \sqrt{(1-(v/c)^2}$.

W danej chwili t_0 do szczeliny dociera światło wyemitowane przez końce pręta A i B w różnych chwilach t_{A} i t_{B}, w których współrzędne tych końców wynosiły odpowiednio $x_{\mathrm{A0}} = x_{\mathrm{A}}(t_A)$ i $x_{\mathrm{B0}} = x_{\mathrm{B}}(t_{\mathrm{B}})$. Jeśli w chwili t_0 szczelina jest otwarta, to na kliszy rejestrowany jest obraz pręta o długości

$$l' = x_{\mathrm{B0}} - x_{\mathrm{A0}} \ , \tag{3}$$

ponieważ oś x i klisza są umieszczone symetrycznie względem przesłony.

Z rysunku 1 oraz równań (1) i (2) wynika, że spełnione są następujące układy równań:

$$\begin{cases} x_{\mathrm{A}0} = vt_{\mathrm{A}} \\ c(t_0 - t_{\mathrm{A}}) = \sqrt{x_{\mathrm{A}0}^2 + d^2} \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{B}0} = vt_{\mathrm{B}} + l\gamma \\ c(t_0 - t_{\mathrm{B}}) = \sqrt{x_{\mathrm{B}0}^2 + d^2} \end{cases} \tag{5}$$

z których możemy wyliczyć $x_{\mathrm{A}0}$ i $x_{\mathrm{B}0}$. Eliminując t_{A} z układu (4) dostajemy równanie kwadratowe

$$x_{\mathrm{A}0}^2\gamma^2 - 2vt_0x_{\mathrm{A}0} + \frac{v^2}{c^2}(t_0^2c^2 - d^2) = 0 \ , \tag{6}$$

skąd

$$x_{\mathrm{A}0} = \frac{vt_0 \pm (v/c)\sqrt{v^2t_0^2 + \gamma^2d^2}}{\gamma^2} \ . \tag{7}$$

Wybieramy rozwiązanie ze znakiem "$-$", aby spełnić warunek $x_{\mathrm{A}0} < vt_0$ ($x_{\mathrm{A}0}$ odpowiada chwili t_{A}, w której z końca pręta A zostało wyemitowane światło, które dotrze do szczeliny w późniejszej chwili t_0). W analogiczny sposób wyznaczamy wartość x_{B0} z układu (5):

$$x_{\mathrm{B}0} = \frac{vt_0 + \gamma l - (v/c)\sqrt{(vt_0 + \gamma l)^2 + \gamma^2d^2}}{\gamma^2} \ . \tag{8}$$

Po podstawieniu $x_{\mathrm{A}0}$ i $x_{\mathrm{B}0}$ do równania (3) otrzymujemy ostatecznie

$$l' = \frac{1}{\gamma^2}\left[\gamma l - \frac{v}{c}\left(\sqrt{v^2t_0^2 + \gamma^2d^2} - \sqrt{(vt_0 + \gamma l)^2 + \gamma^2d^2}\right)\right] \tag{9}$$

Dla wartości l, v i d podanych w treści zadania, otrzymujemy w chwilach $t_0 = t_1 = -1$ s i $t_0 = t_2 = 1$ s długości obrazu pręta na kliszy równe odpowiednio

$$4{,}36\mathrm{m} \text{ i } 0{,}23\mathrm{m}. \tag{10}$$

Punktacja
Układy równań (4) i (5) wraz z wcześniejszą analizą .... maks. 5pkt
Rozwiązanie układów, tzn. równania (7) i (8) .... maks. 3pkt
Wynik końcowy (9) 1pkt
Wyniki liczbowe (11) 1pkt

Uwaga

W ostatnim zdaniu treści zadania powinno być ***dokłanie nad szczeliną***, a nie *dokładnie nad przesłoną*. Dlatego rozwiązania, w których uczeń przyjmuje w chwili t_1 inne położenie pręta, niż przyjęto w rozwiązaniu wzorcowym, należy uznać za poprawne.