LIII OLIMPIADA FIZYCZNA (2003/2004). Stopień III, zadanie teoretyczne – T2.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
Jacek Jasiak, Andrzej Wysmolek: Fizyka w Szkole nr 4, 2004.

Nazwa zadania: Dwa balony wypełnione gorącym powietrzem i parą wodną.

Działy: Termodynamika

Słowa kluczowe: Balon, ciepło, temperatura, gęstość, prawo Archimedesa, masa molowa, ciepło molowe, stan gazu doskonałego, parowanie, temperatura wrzenia, przyspieszenie ziemskie.

Zadanie teoretyczne – T2, zawody III stopnia, LIII OF.

Skonstruowano dwa balony, z których pierwszy jest wypełniony gorącym powietrzem o temperaturze T = 373 K, a drugi parą wodną o takiej samej temperaturze. Sprawdzono, że tuż nad powierzchnią ziemi każdy z balonów może unieść masę m = 300 kg, włączając w to masę powłoki, linek i innych elementów konstrukcyjnych. Temperatura otoczenia wynosi T_0 = 293 K, ciśnienie $p = 10^5$ Pa.

a) Ile wynoszą objętości V_1 i V_2 balonów?

b) Jaka jest minimalna ilość ciepła niezbędna do podgrzania (od temperatury otoczenia) powietrza w pierwszym balonie? Ile wynosi minimalna ilość ciepła niezbędna do wytworzenia, z wody o temperaturze równej temperaturze otoczenia, pary wodnej potrzebnej do wypełnienia drugiego balonu?

c) Stwierdzono, że tuż po napełnieniu pierwszego balonu, tempo utraty jego siły nośnej (udźwigu)jest równe k_1 =0,3 N/s. Ile wynosi tempo utraty siły nośnej drugiego balonu k_2 tuż po jego napełnieniu? Rozważ dwie możliwości: (i) cała skroplona para z drugiego balonu pozostaje w jego wnętrzu (zbiera się w specjalnym pojemniku) oraz (ii) cała skroplona para z drugiego balonu jest natychmiast usuwana (spada na ziemie). Kształt obu balonów jest taki sam, powłoki mają takie same przewodnictwo cieplne, są nierozciągliwe, wiotkie i nie przepuszczają ani pary, ani powietrza. Zakładamy, że para spełnia równanie stanu gazu doskonałego. Każdy z balonów ma na dole mały otwór. Po napełnieniu balonów nie jest do nich dostarczane ciepło.

Do obliczeń przyjmij następujące wartości: masa molowa powietrza M_p = 0,029 kg/mol; masa molowa wody M_w = 0,018 kg/mol; stała gazowa R = 8,3 J · mol^{-1} · K^{-1}; ciepło molowe powietrza przy stałej objętości $c_V = \left(\frac{5}{2}\right)R$; ciepło właściwe wody c_w=4200 J · kg^{-1} · K^{-1}; temperatura wrzenia wody pod ciśnieniem $p = 10^5$ Pa – 373 K; ciepło parowania wody w temperaturze 373 K (i ciśnieniu $p = 10^5$ Pa) $r = 2{,}3 \cdot 10^6 \ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$; przyspieszenie ziemskie $g = 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Rozwiązanie

a) Gęstość gazu doskonałego wyraża się wzorem $\rho = \frac{pM}{RT}$, gdzie M jest jego masą molową, zatem gęstości są odpowiednio równe:

- powietrza na zewnątrz balonów

$$\rho_0 = \frac{pM_p}{RT_0} = 1{,}191\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad ,$$

- powietrza w pierwszym balonie

$$\rho_1 = \frac{pM_p}{RT} = 0{,}936\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\,,$$

- pary wodnej w drugim balonie

$$\rho_2 = \frac{pM_w}{RT_0} = 0{,}581\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\,.$$

Korzystając z prawa Archimedesa, otrzymujemy $\rho_0\, V_i = m + \rho_i\, V_i$, zatem

$$V_1 = \frac{m}{\rho_0 - \rho_1} = \frac{m\,R\,T\,T_0}{p\,M_p(T - T_0)} = 1174\,\text{m}^3\,,$$

$$V_2 = \frac{m}{\rho_0 - \rho_2} = \frac{m\,R}{p\,M_p(\frac{M_p}{T_0} - \frac{M_w}{T})} = 491\,\text{m}^3\,.$$

b) Ciepło, niezbędne do ogrzania powietrza wynosi $Q_1 = n\,c_p \Delta T$, gdzie $c_p = c_V + R$ jest ciepłem molowym przy stałym ciśnieniu (w takich warunkach odbywa się podgrzewanie). Otrzymujemy

$$Q_1 = \frac{pV_1}{RT}\,c_p(T - T_0) = 88{,}1\,\text{MJ}.$$

Ciepło dostarczone w drugim przypadku jest sumą ciepła potrzebnego do podgrzania wody do $100^\circ\,\text{C}$

$$Q_{2pod} = m_2 c_w \Delta T\,,$$

oraz ciepła potrzebnego do odparowania wody

$$Q_{2par} = m_2 r\,,\ \text{gdzie}\ m_2 = V_2\rho_2 = \frac{m}{\frac{M_p T}{M_w T_0} - 1} = 285\ \text{kg},$$

jest masą pary (wody).
Zatem

$$Q_2 = \frac{m}{\frac{M_p T}{M_w T_0} - 1}[c_w(T - T_0) + r] = 752\ \text{MJ}.$$

c) Załóżmy, że w przypadku pierwszego balonu prędkość pływu ciepła przez powłokę wynosi q_1. Po czasie dt wypłynie $q_1\,\mathrm{d}t$ ciepła, co spowoduje obniżenie temperatury powietrza o $\mathrm{d}T = \dfrac{q_1 \mathrm{d}t}{nc_p}$, a w konsekwencji jego objętości o $\mathrm{d}V_1 = \dfrac{nR}{p}\mathrm{d}T$ (n i p są stałe!). Zatem spadek siły nośnej wyniesie

$$\mathrm{d}V_1 = g\rho_0 \mathrm{d}V_1 = g\frac{M_p q_1}{T_0 c_p}\mathrm{d}t = (3{,}40\cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{J}})\cdot gq_1\mathrm{d}t\,.$$

Powierzchnia drugiego balonu jest równa $\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}}$ razy powierzchnia pierwszego balonu, czyli prędkość wypływu ciepła w tym przypadku jest równa $q_2 = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot q_1$. W ciągu czasu d$t$ skropleniu ulegnie $\dfrac{q_2\mathrm{d}t}{r}$ kilogramów pary, czyli objętość pary zmniejszy się o $\mathrm{d}V_2 = \dfrac{q_2\mathrm{d}t}{r\rho_w}$. Zatem spadek siły wyporu w tym przypadku wynosi

$$\mathrm{d}V_{2wyporu} = g\rho_0\mathrm{d}V_2 = g\frac{\rho_0\left(\dfrac{V_2}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}} q_1}{r\rho_w}\mathrm{d}t = \left(5{,}07\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{J}}\right)\cdot gq_1\mathrm{d}t\,.$$

Jeśli skroplona para pozostaje w balonie, to spadek siły nośnej jest równy spadkowi siły wyporu: $\mathrm{d}V_2 = \mathrm{d}V_{2wyporu}$. Otrzymujemy

$$k_2 = \frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}V_1}k_1 = 0{,}15k_1 = 0{,}045\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}}\,.$$

Jeśli woda powstała ze skroplenia (lub załoga ją wylewa), to spadek siły nośnej jest równy spadkowi siły wyporu minus zmniejszenie ciężaru pary:

$$\mathrm{d}V'_2 = g\left(\frac{\rho_0 q_2}{r\rho} - \frac{q_2}{r}\right)\mathrm{d}t = g\left(\frac{\rho_0}{\rho_w} - 1\right)\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{q_1}{r}\mathrm{d}t = \left(2{,}60\cdot 10^{-7}\,\frac{kg}{J}\right)\cdot gq_1\mathrm{d}t\,.$$

W tym przypadku tempo siły nośnej wynosi

$$k_2^{'} = \frac{\mathrm{d}N_2^{'}}{\mathrm{d}N_1}k_1 = 0{,}08k_1 = 0{,}023\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{s}}\,.$$