



LIII OLIMPIADA FIZYCZNA
(2003/2004)
ZAWODY III STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Zadanie teoretyczne – T3

Nazwa – Ramka unosząca się nad nadprzewodnikiem.

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej

– Jacek Jasiak¹, Andrzej Wysmołek²: *Fizyka w Szkole* nr 4, 2004, s. 235–241

– T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Wektor indukcji magnetycznej \vec{B} tuż nad powierzchnią nadprzewodnika jest zawsze styczny do tej powierzchni

a) Korzystając z tego faktu, oblicz siłę działającą na jednostkę długości nieskończenie długiego, cienkiego, prostoliniowego przewodu znajdującego się w odległości d od płaszczyzny nadprzewodnika. Wyznacz pole \vec{B} tuż nad nadprzewodnikiem. W przewodzie płynie prąd o natężeniu I .

b) Rozważmy wykonaną z przewodnika, prostokątną ramkę o wymiarach $a \times b$, przy czym $a \gg b$, w której płynie ustalony prąd o nieznanym natężeniu. Masa ramki jest równa m . Przewodnik jest cienki.

Sprawdzono, że gdy ramka ustawiona jest tak, że jej krótsze boki są pionowe, to unosi się (lewituje) nad poziomą, nadprzewodzącą płaszczyzną na wysokość d_{\perp} liczonej do środka ramki, przy czym $a \gg d_{\perp} \gg b$.

Czy ramka będzie się unosić również w przypadku, gdy jej płaszczyzna będzie równoległa do powierzchni nadprzewodnika? Jeśli tak to na jakiej wysokości d_{\parallel} ?

Przyspieszenie grawitacyjne jest równe g .

Uwaga !

W obu przypadkach natężenie prądu płynącego w ramce jest jednakowe.

¹ Dr Jacek Jasiak — sekretarz naukowy ds. zadań teoretycznych w KGOF od LIV OF; od LIII OF do LV OF był współautorem artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF (laureat XXVI OF i XXVII OF, brązowy medalista X MOF w Hradec Králové w 1977 r.) (przyp. red.).

² Andrzej Wysmołek (wówczas dr) był sekretarzem naukowym ds. zadań doświadczalnych w KGOF od XLIII do XLVIII i od LII do LX OF; w okresie do II stopnia LV OF, był współautorem artykułów w *Fizyce w Szkole* z OF. Od LXIX OF pełni funkcję Przewodniczącego KGOF (przyp. red.).

Rozwiązanie zadania T3 – LIII OF, III stopień, część teoretyczna

a) Przyjmijmy, że powierzchnia nadprzewodnika jest określona równaniem $y = 0$, przewodnik określają równania $y = d$ i $x = 0$, a prąd płynie w nim zgodnie z wektorem \vec{e}_z . Pole \vec{B} dla $y > 0$ jest sumą pól pochodzących od prądu płynącego w naszym drucie i prądów wyindukowanych w nadprzewodniku. Zakładamy, że dla $y > 0$ pole magnetyczne pochodzące od prądów wyindukowanych w nadprzewodniku jest równe polu pochodzącemu od przewodnika o równaniach $y = -d'$, $x = 0$ w którym płynie prąd I' zgodnie z wektorem \vec{e}_z . Łącznie mamy

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[-\frac{y-d}{(y-d)^2 + x^2}, \frac{x}{(y-d)^2 + x^2}, 0 \right] + \frac{\mu_0 I'}{2\pi} \left[-\frac{y+d'}{(y+d')^2 + x^2}, \frac{x}{(y+d')^2 + x^2}, 0 \right],$$

gdzie wykorzystaliśmy wzór na indukcję magnetyczną pola nieskończonego, prostoliniowego przewodu. Tuż nad powierzchnią nadprzewodnika („ $y = 0^+$ ”) dostajemy

$$\vec{B}(x, y = 0^+, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[-\frac{-d}{d^2 + x^2}, \frac{x}{d^2 + x^2}, 0 \right] + \frac{\mu_0 I'}{2\pi} \left[-\frac{d'}{d'^2 + x^2}, \frac{x}{d'^2 + x^2}, 0 \right].$$

Aby spełnić warunek brzegowy, musimy przyjąć $d' = d$, $I' = -I$. Otrzymujemy wtedy

$$\vec{B}(x, y = 0^+, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{2d}{d^2 + x^2}, 0, 0 \right]. \quad (1)$$

Siła działająca na nasz przewód przechodzi od pola magnetycznego wytworzonego przez przewod-obraz i zgodnie ze znanym wzorem jest równa (na jednostkę długości)

$$\vec{f} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi d} \vec{e}_y. \quad (2)$$

Nasz przewód jest odpychany od przewodnika.

b) Korzystając z zasady superpozycji i wyników punktu a) otrzymujemy, że pole magnetyczne nad nadprzewodnikiem jest sumą pola magnetycznego naszej ramki i ramki-obrazu, będącej odbiciem rzeczywistej ramki względem płaszczyzny nadprzewodnika ze zamianą prądu I płynącego w ramce na $-I$. Zatem siła działająca na ramkę jest siłą pochodząca od ramki-obrazu.

Jeśli wysokość y ramki nad nadprzewodnikiem spełnia warunek $a \gg y \gg b$, to możemy przyjąć, że pole magnetyczne od ramki obrazu jest polem od dwóch nieskończonych, równoległych przewodników z prądem I i $-I$. Przyjmijmy, że nadprzewodnik leży w płaszczyźnie $y = 0$ i że dłuższe boki ramki są określone równaniami:

$$x = x_1, y = y_1, -\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2} \text{ oraz } x = -x_1, y = y_2, -\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}.$$

Siły działające na te boki będą równe:

$$\vec{F}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 a \left[-\frac{2x_1}{(2x_1)^2 + (y_1 + y_2)^2}, \frac{2y_1}{(2y_1)^2} - \frac{y_1 + y_2}{(2y_1)^2 + (y_1 + y_2)^2}, 0 \right], \quad (3)$$

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 a \left[-\frac{2x_1}{(2x_1)^2 + (y_1 + y_2)^2}, \frac{2y_2}{(2y_1)^2} - \frac{y_1 + y_2}{(2y_1)^2 + (y_1 + y_2)^2}, 0 \right]. \quad (4)$$

Ponieważ $a \ll b$, siły pochodzące od krótszych boków pomijamy.

Suma sił \vec{F}_1 i \vec{F}_2 , dla ramki równoległej do nadprzewodnika ($x_1 = \frac{b}{2}$, $y_1 = y_2 = y$), jest równa:

$$\vec{F}_{\parallel} = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 a \left[0, 2 \frac{2y_1}{(2y_1)^2} - 2 \frac{2y_1}{b^2 + (2y_1)^2}, 0 \right] \approx \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 a \left[0, 2 \frac{2y_1}{(2y_1)^4} b^2, 0 \right] = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 a \left[0, \frac{b^2}{4y^3}, 0 \right]. \quad (5)$$

Dla ramki prostopadłej do nadprzewodnika ($x_1 = 0$, $y_1 = y + \frac{b}{2}$, $y_2 = y - \frac{b}{2}$), jest równa:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\perp} &= \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 a \left[0, \frac{2y_1}{(2y_1)^2} - \frac{y_1 + y_2}{(y_1 + y_2)^2} + \frac{2y_2}{(2y_2)^2} - \frac{y_1 + y_2}{(y_1 + y_2)^2} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 a \left[0, \frac{2y + b}{(2y + b)^2} - \frac{2y}{(2y)^2} + \frac{2y - b}{(2y - b)^2} - \frac{2y}{(2y)^2}, 0 \right] \\ &\approx \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 a \left[0, \frac{b^2}{4y^3}, 0 \right], \end{aligned} \quad (6)$$

czyli w obu przypadkach siła jest taka sama!

Oznacza to, że w obu przypadkach ramka będzie się unosiła na tej samej wysokości nad nadprzewodnikiem, czyli

$$d_{\parallel} = d_{\perp}. \quad (7)$$

Odp.: W obu przypadkach ramka będzie lewitować na tej samej wysokości, czyli $d_{\parallel} = p_{\perp}$.

Punktacja

- Znalezienie położenia przewodu obrazowego i płynącego w nim prądu oraz wzór na \vec{B} tuż nad nadprzewodnikiem (wzór (1) lub równoważny) 3 pkt.
- Siła działająca na jednostkę długości (wzór (2)) 1 pkt.
- Ustalenie, że siła działająca na ramkę jest siłą pochodzącą od ramki obrazowej, wraz z podaniem właściwego ustawienia ramki obrazowej i płynącego w niej prądu 1 pkt.
- Wzór na siłę pochodzącą od ramki obrazowej w przypadku ramki równoległej do nadprzewodnika (wzór (5)) 2 pkt.,
przy czym wzór na siłę bez wykonania przejścia granicznego 1 pkt.
- Wzór na siłę pochodzącą od ramki obrazowej w przypadku ramki prostopadłej do nadprzewodnika (wzór (6)) 2 pkt.,
przy czym wzór na siłę bez dokonania przejścia granicznego 1 pkt.
- Wynik końcowy (wzór (7)) 1 pkt.