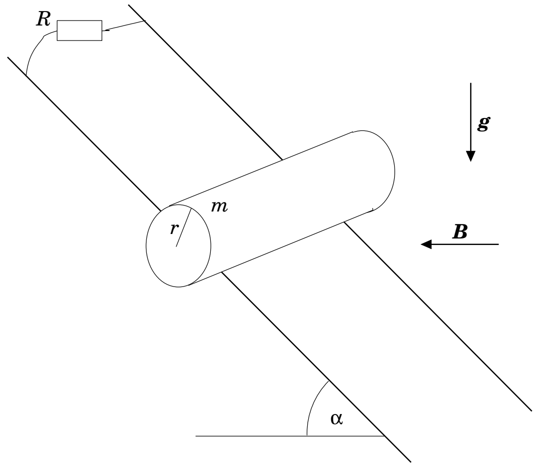
Zadanie T3

Jednorodny, metalowy walec o masie m i promieniu r położono poziomo na dwóch równoległych, odległych od siebie o d prostoliniowych przewodach, które tworzą równię pochyłą nachyloną do poziomu pod kątem α. Końce przewodów są połączone ze sobą opornikiem o oporze R. Cały układ znajduje się w skierowanym poziomo, prostopadle do osi walca, stałym i jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B (patrz rysunek 4).



rys. 4

a) Jaka jest prędkość maksymalna $v_{\max}$, jaką w rozważanej sytuacji może osiągnąć staczający się walec? Przedyskutuj wynik w zależności od wartości kąta α.
b) Wyznacz zależność przyspieszenia a oraz przyspieszenia kątowego ϵ od jego prędkości v. Podaj wartości a i ϵ dla $v = 0$ oraz $v = \frac{1}{2}v_{\max}$.
c) Opisz jakościowo zachowanie się walca w przypadku, gdy nadano mu prędkość początkową (wzdłuż przewodów) większą od $v_{\max}$.
Walec toczy się bez poślizgu. Opory toczenia, opór powietrza oraz opory elektryczne drutów i walca można zaniedbać. Przyjmij, że poza bliską okolicą miejsc styku walca z przewodami, prąd płynący przez walec jest równomiernie rozłożony na całej powierzchni jego przekroju poprzecznego.

Rozwiązanie T3

a), b) Gdy walec stacza się z prędkością v, to indukowana siła elektromotoryczna jest równa

$$U = vdB\sin\alpha, \tag{1}$$

która powoduje, że płynie przez niego prąd

$$I = \frac{U}{R} = \frac{vdB\sin\alpha}{R}. \tag{2}$$

Ten prąd wytwarza siłę elektrodynamiczną równą

$$F_B = IdB, \tag{3}$$

i skierowaną pionowo w górę (ta siła musi się przeciwstawiać zmianie strumienia indukcji magnetycznej, dlatego w przypadku staczającego się walca jest skierowana w górę, a nie w dół).
Rozważmy teraz moment siły elektrodynamicznej względem chwilowej osi obrotu walca. Zgodnie z treścią zadania prąd I jest rozłożony równomiernie na całej powierzchni przekroju poprzecznego walca (jest to naturalne założenie gdy $d \gg r$), zatem również siła

F_B jest sumą równomiernie rozłożonych sił działających na poszczególne "linie prądu". Suma momentów tych sił (względem dowolnego punktu) jest równa momentowi siły F_B (względem tego samego punktu) przyłożonej do środka walca. Jest to analogiczna sytuacja jak przypadku siły ciężkości działającej na ciało znajdujące się w jednorodnym polu grawitacyjnym.
Uwzględniając siłę grawitacyjną, całkowity moment siły względem chwilowej osi obrotu walca jest równy

$$M = (mg - F_B)\, r \sin\alpha.$$

Przyspieszenie kątowe walca zatem wynosi

$$\epsilon = \frac{(mg - F_B)\, r \sin\alpha}{I + mr^2} = \frac{mg - \frac{1}{R} v d^2 B^2 \sin\alpha}{\frac{3}{2} mr} \sin\alpha, \tag{4}$$

gdzie $I = \frac{1}{2} mr^2$ jest momentem bezwładności walca względem jego osi. Stąd przyspieszenie walca jest równe

$$a = \epsilon r = \frac{mg - \frac{1}{R} v d^2 B^2 \sin\alpha}{\frac{3}{2} m} \sin\alpha = \frac{2}{3} g (1 - \frac{v}{v_{\mathrm{m}}}) \sin\alpha, \tag{5}$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie

$$v_{\mathrm{m}} = \frac{mgR}{d^2 B^2 \sin\alpha}. \tag{6}$$

Ponieważ $a > 0$ dla $v < v_{\mathrm{m}}$ oraz $a = 0$ dla $v = v_{\mathrm{m}}$, wzór (5) oznacza, że powyższe v_{m} jest maksymalną prędkością, jaką walec może osiągnąć w rozważanej sytuacji (tzn. gdy jego prędkość początkowa jest równa 0). Oznacza to, że $v_{\mathrm{m}} = v_{\max}$, czyli szukana w punkcie a) prędkość maksymalna jest równa

$$v_{\max} = \frac{mgR}{d^2 B^2 \sin\alpha}. \tag{7}$$

Wzór na a w nowych oznaczeniach przyjmie postać

$$a = \frac{2}{3} g \left(1 - \frac{v}{v_{\max}}\right) \sin\alpha. \tag{8}$$

Dla $v = 0$ otrzymujemy

$$a = \frac{2}{3} g \sin\alpha, \tag{9}$$

dla $v = \frac{v_{\max}}{2}$ otrzymujemy

$$a = \frac{1}{3} g \sin\alpha. \tag{10}$$

Dyskusja zależności $v_{\max}$ od α:
Zauważmy, że zgodne z treścią zadania wartości α odpowiadają $0 \leq \alpha < \pi/2$.
Ze wzoru (7) wynika, że $v_{\max}$ jest najmniejsze dla $\alpha = \pi/2$ i rośnie gdy α maleje. Gdy α dąży do 0, $v_{\max}$ dąży do nieskończoności. Zauważmy jednak, że im mniejsze α, tym mniejsze jest przyspieszenie, a więc wzrasta czas osiągnięcia prędkości zbliżonej do $v_{\max}$. W przypadku dokładnego $\alpha = 0$ wcale nie będziemy mieli nieskończonej prędkości maksymalnej, gdyż wtedy przyspieszenie jest równe 0 i walec pozostanie w spoczynku (czyli można przyjąć, że prawdziwe $v_{\max} = 0$). Warto zauważyć, że tak naprawdę przypadki z różnymi α odpowiadają tej samej granicznej wartości pionowej składowej prędkości walca równej $\frac{mgR}{d^2 B^2}$!

c) Formalnie wzór (8) obowiązuje również dla $v > v_{\max}$; wynika z niego, że walec będzie zmniejszał swoją prędkość, aż do osiągnięcia prędkości $v_{\max}$. Jednak w rzeczywistości w tej sytuacji suma siły F_B i siły grawitacyjnej jest skierowana do góry, co oznacza, że walec oderwie się od przewodów. To jednak oznacza przerwanie obwodu i wyłączenie działania siły F_B, a więc niemożność oderwania się walca od przewodów! W praktyce sytuacja będzie taka, że ze względu na zmniejszenie siły nacisku opór w obwodzie wzrośnie na tyle, że F_B będzie jednak mniejsze od mg. W idealnym przypadku $F_B = mg$, co oznacza, że walec poruszałby się ze stałą prędkością. Dokładnie co by się w rzeczywistości działo w takiej sytuacji nie można jednak określić na podstawie treści zadania i potrzebne są dodatkowe założenia.

Punktacja

Wyznaczenie siły elektromotorycznej (wzór (1)) – 1pkt.
Wyznaczenie prądu I (wzór (2)) – 1pkt.
Wzór na siłę elektrodynamiczną (wzór (3)) – 1pkt.
Wyznaczenie przyspieszeń a i ϵ (wzory (5) i (4)) – 2pkt.
Wyznaczenie $v_{\max}$(wzór (7)) – 1pkt.
Podanie szczególnych wartości a dla $v = 0$ i $v = v_{\max}/2$ (wzory (9) i (10)) – 1pkt.
Dyskusja zależności $v_{\max}$ od α, w szczególności wyjaśnienie przypadku $\alpha = 0$ – 1pkt.
Zauważenie, że przyjęcie $v > v_{\max}$ przy założeniu, że obwód pozostaje zamknięty i opór się nie zmienia, powoduje oderwanie walca i prowadzi do sprzeczności – 2pkt.