Zadanie 1

Operator nowej sieci telefonii komórkowej chciałby tak dobrać parametry sieci, żeby kierowcy mogli odbierać sygnał tylko wtedy, kiedy ich auto porusza się z prędkością nie przekraczającą $10\,\mathrm{km/h}$. Jaka powinna być częstotliwość f sygnału nośnego, jeżeli nadajniki i (spoczywające) odbiorniki przystosowane są do pracy w zakresie $f \pm 5\,\mathrm{kHz}$?

Przyjmij, że samochód jedzie w kierunku nadajnika i że przy prędkości $10\,\mathrm{km/h}$ odbiornik powinien przestać odbierać jakikolwiek sygnał z nadajnika.

Rozwiązanie 1

Aby odbiornik nie odbierał żadnego sygnału z nadajnika, zakresy nadawanej i odbieranej częstotliwości nie mogą się przekrywać. Oznacza to, że minimalna zmiana częstotliwości wywołana ruchem odbiornika wynosi $\Delta f = 2 \cdot 5\,\mathrm{kHz}$. Zgodnie ze wzorem Dopplera $\Delta f / f \approx v/c$. Stąd $f = (c/v)\Delta f \approx 10^{12}\,\mathrm{Hz}$ (c — prędkość światła, v — prędkość odbiornika względem nadajnika).

Zadanie 2

Dwa identyczne dielektryczne krążki naładowano jednorodnie identycznymi ładunkami. Krążki umieszczono niedaleko od siebie tak, że ich osie się pokrywają. Krążki mogą swobodnie obracać się wokół swoich osi, ale początkowo nie obracają się. Po rozkręceniu pierwszego krążka, drugi: a) będzie się obracał w tę samą stronę; b) będzie się obracał w przeciwną stronę; c) nie będzie się obracał.

Rozwiązanie 2

I sposób: Kręcący się naładowany krążek wytwarza pole magnetyczne przenikające drugi krążek. Ze wrostem prędkości kątowej obrotu pierwszego krążka będzie wzrastał strumień indukcji magnetycznej przenikającej przez dowolnie wybrane koło współśrodkowe z drugim krążkiem i leżące w jego płaszczyźnie. Taki rosnący strumień indukcji wytwarza, zgodnie z prawem Faradaya, pole elektryczne styczne do okręgu będącego brzegiem rozważanego koła. Ze względu na znak "$-$" w prawie Faradaya, zwrot tego pola jest przeciwny do zwrotu prądu wywołanego ruchem ładunków z pierwszego krążka (do ustalenia tego zwrotu rozpatrujemy fragment pierwszego krążka najbliższy miejscu, w którym rozważamy to pole elektryczne). Takie pole elektryczne spowoduje obracanie się drugiego krążka w przeciwną stronę niż pierwszy krążek.

II sposób: Pole magnetyczne wytwarzane przez obrót drugiego krążka powinno być takie, żeby przeciwstawić się wzrostowi pola magnetycznego wytwarzanego przez pierwszy krążek. Oznacza to, że drugi kążek powinien się kręcić w przeciwną stronę niż pierwszy.

Uwaga: w praktyce rozważany efekt może być trudny do zaobserwowania, bo niejednorodności (w treści zadania było założenie jednorodności!) w rozkładzie ładunków mogą spowodować, że drugi krążek będzie się kręcił w tę samą stronę co pierwszy.

Zadanie 3

Jaka powinna być moc lasera, aby wysyłane przez niego światło mogło unieść lusterko o ciężarze 1N? Zakładamy, że promień lasera jest skierowany pionowo, a światło pada prostopadle na lusterko i odbija się od niego bez strat energii.

Rozwiązanie 3

Jeśli w ciągu czasu $\mathrm{d}t$ do lusterka dolatuje strumień fotonów o pędzie $\mathrm{d}p$, to zmiana ich pędu w wyniku odbicia jest równa $\mathrm{d}p - (-\mathrm{d}p) = 2\mathrm{d}p$. Zatem siła F z jaka działają one na lusterko jest równa $2\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$. Związek między energią fotonu E_γ i jego pędem p_γ jest dany wzorem $E_\gamma = p_\gamma c$, gdzie c jest prędkością światła, co oznacza, że energia rozważanego strumienia fotonów jest równa $\mathrm{d}E = c\ \mathrm{d}p = c\ (1/2)F\mathrm{d}t$. Podstawiając $F = 1\,\mathrm{N}$, $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$, otrzymamy, że moc lasera (czyli energia światła wysyłanego przez niego w jednostce czasu) powinna być równa $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0,5\,\mathrm{N} \cdot 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} = 1,5 \cdot 10^8\,\mathrm{W} = 150\,\mathrm{MW}$.

Zadanie 4

Obserwator spoczywający względem odległych, nieruchomych gwiazd stwierdza, że połowa widzianych przez niego na niebie gwiazd znajduje się w zakresie kątów od 0 do $\pi/2$ mierzonych względem kierunku do wybranej gwiazdy G. W jakim zakresie kątów (mierzonych od tego samego kierunku) będzie on obserwował połowę widzianych gwiazd, jeśli będzie się poruszał w stronę gwiazdy G z prędkością $v = 150\,\text{tys. km/s}$?

Zakładamy, że w obu przypadkach obserwator widzi te same gwiazdy.

Rozwiązanie 4

Wystarczy rozważyć, pod jakim kątem będzie widoczna gwiazda, znajdująca się początkowo pod kątem $\theta = \pi/2$. Dla obserwatora poruszającego się światło wysłane przez nią porusza się z prędkością, której składowa w kierunku gwiazdy G wynosi $-v$, stąd $v = c\cos\theta'$, gdzie θ' jest kątem, pod jakim widzi rozważaną gwiazdę obserwator poruszający się. Zatem $\theta' = \arccos v/c = \arccos 1/2 = \pi/3 = 60°$. Czyli połowę gwiazd poruszający się obserwator zaobserwuje w zakresie kątów od 0 do 60° (i oczywiście drugą połowę w zakresie kątów od 60° do 180°).

Zadanie 5

W promieniowaniu kosmicznym obserwuje się m.in. protony o energii $10^{19}\,\text{eV}$. Oblicz jak długo proton o takiej energii leciałby do Ziemi od najbliższej gwiazdy (odległej o ok. 4 lata świetlne) według obserwatora na Ziemi, a jak długo według obserwatora współporuszającego się z tym protonem?

Rozwiązanie 5

Związek między energią E cząstki, jej masą spoczynkową m i prędkością v jest dany wzorem $E = mc^2\gamma$, gdzie $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, a c jest prędkością światła. W rozważanym przypadku mamy $\gamma = 10^{19}\,\text{eV}/938\,\text{MeV} \approx 10^{10}$, co oznacza że $v \approx c$. Zatem czas lotu protonu według obserwatora na Ziemi będzie równy $T_{\text{Ziemia}} = 4\,\text{lata}$. Oznaczmy przez T_{proton} czas tego lotu dla obserwatora współporuszającego się z protonem. Wykorzystując wzór na dylatację czasu, sprowadzający się w rozważanym przypadku do postaci $T_{\text{Ziemia}} = \gamma T_{\text{proton}}$, otrzymamy $T_{\text{proton}} = 4\,\text{lata}/\gamma = 365 \cdot 24 \cdot 3600\,\text{s}/10^{10} =\approx 3 \cdot 10^{-3}\,\text{s}$.

Zadanie 6

Pewna lekkoatletka o wzroście $1,8\,\text{m}$ potrafi skoczyć z pozycji stojącej na odległość $2\,\text{m}$. Na jaką odległość potrafiłaby skoczyć jej koleżanka, która ma $1,5\,\text{m}$ wzrostu i identyczne proporcje budowy ciała?

W chwili wyskoku i w chwili lądowania lekkoatletki mają taką samą pozycję. Siła mięśni jest proporcjonalna do ich przekroju poprzecznego. Opór powietrza pomijamy.

Rozwiązanie 6

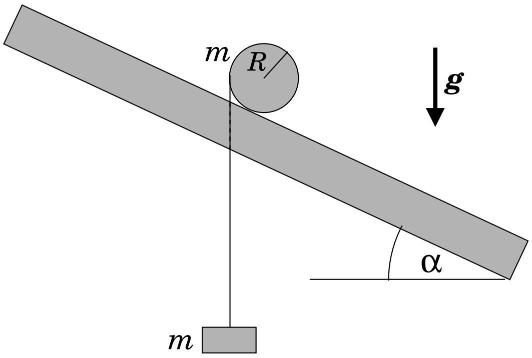
Długość skoku lekkoatletki jest proporcjonalna do kwadratu jej prędkości początkowej v. Praca W wykonywana przez lokkoatletkę przy skoku proporcjonalna jest do siły jej mięśni F i wzrostu L ($W \propto FL$), więc dla lekkoatletki o masie m mamy $v^2 \propto FL/m$. Jeśli F, L i m opisują lekkoatletkę wyższą, to niższą opisują odpowiednio k^2F, kL i k^3m, gdzie $k = 1,5/1,8$. Stąd dostajemy, że przy skoku prędkości początkowe obydwu lekkoatletek są równe, a więc obydwie skoczą na tę samą odległość.

Zadanie 7

Na walec o promieniu R oraz masie m, nawinięto nieważką, cienką nitkę. Walec położono na równi pochylej o kącie nachylenia α, a przez szczelinę w równi przełożono nitkę i przymocowano do jej końca ciężarek o masie m (patrz rysunek 1). Dla jakich α walec będzie wtaczać się na równię? Między walcem a równią nie ma poślizgu. Również nitka nie ślizga się po walcu.

Rozwiązanie 7

I sposób: "Przytrzymajmy palcem" walec tak, by się nie poruszał i rozważmy pozostałe siły działające na niego. Działanie siły napięcia nici oraz ciężaru walca jest równoważne działaniu jednej siły o wartości $2mg$, przyłożonej w połowie odległości między osią walca, a miejscem, w którym nitka styka się z walcem. Po puszczeniu walca, będzie się on wtaczał, jeśli prosta, na której leży ta siła, będzie za (patrząc od dołu) chwilową osią obrotu, czyli za punktem styczności walca z równią. Stąd $\alpha < 30°$. Uwaga: dla $\alpha < 30°$ ciężarek obniża się z pewnym przyspieszeniem, co powoduje, że napięcie nici jest mniejsze niż mg. To zmniejszenie napięcia nici nie



rys. 1

może jednak być na tyle duże, by walec przestał się wtaczać, gdyż wtedy przyspieszenie ciężarka zmalałoby do zera, a w takiej sytuacji napięcie nici jest równe mg i zgodnie z przedstawionym rozumowaniem walec wtacza się na równię.

II sposób: Przy obrocie walca o kąt ϕ (przyjmijmy, że $\phi > 0$ odpowiada wtaczaniu się walca) jego energia zmieni się o $\Delta h_{\text{walca}} mg = \phi R \sin\alpha \; mg$, natomiast energia ciężarka o $\Delta h_{\text{ciężarka}} mg = (\Delta h_{\text{walca}} - \phi R)\, mg = (\phi R \sin\alpha - \phi R)\, mg$ (Δh_{walca} oznacza tu zmianę wysokości, na jakiej znajduje się walec, a $\Delta h_{\text{ciężarka}}$ — zmianę wysokości, na jakiej znajduje się ciężarek). Walec będzie się wtaczał, jeśli suma tych energii będzie ujemna, czyli gdy $\phi R \sin\alpha \; mg + (\phi R \sin\alpha - \phi R) \; mg = (2\sin\alpha - 1)\,\phi R \; mg < 0$, stąd $\sin\alpha < 1/2$, czyli $\alpha < 30°$.

Zadanie 8

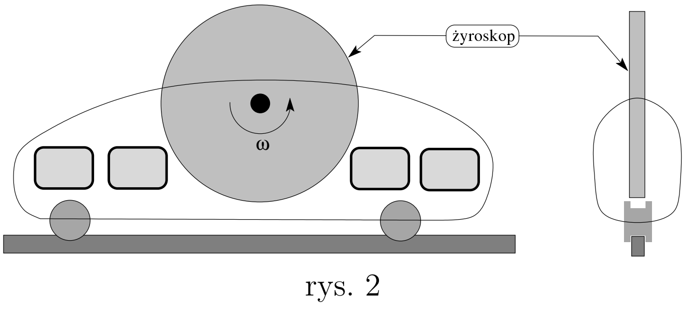
Balony na gorące powietrze mają w dolnej części powłoki mały otwór. Jak obecność tego otworu wpływa na siłę nośną balonu?

Rozwiązanie 8

Siła nośna jest równa różnicy siły wyporu i ciężaru powłoki wraz z wypełniającym ją gorącym powietrzem (pomijamy gondolę, pasażerów, itd.). Dla danego balonu znajdującego się na pewnej wysokości siła wyporu jest maksymalna, gdy masa powietrza wewnątrz powłoki konieczna do jej napięcia jest możliwie najmniejsza. Spadek ciśnienia wraz z wysokością gazu gęstszego jest szybszy niż gazu rzadszego, więc ciśnienie (zimnego) powietrza na zewnątrz balonu maleje szybciej, niż ciśnienie (rozgrzanego — lżejszego) powietrza wewnątrz balonu. Dlatego do napięcia całej powłoki balonu wystarczy, aby przy dolnej jej powierzchni ciśnienia wewnątrz i na zewnątrz były sobie równe. Jeżeli w dolnej części powłoki znajduje się otwór, to warunek równości tych ciśnień jest spełniony, dzięki czemu siła nośna jest maksymalna w danych warunkach.

Zadanie 9

Pewnien konstruktor postanowił zbudować kolej jednoszynową jeżdżącą po jednej zwykłej szynie kolei dwuszynowej. Wagon takiej kolei jedzie na umieszczonych jedno za drugim kołach jezdnych posiadających kryzy z obu stron. W celu stabilizacji wagon posiada masywne koło (żyroskop) obracające się z bardzo dużą prędkością wokół osi równoległej do osi kół jezdnych (rys. 2).



rys. 2

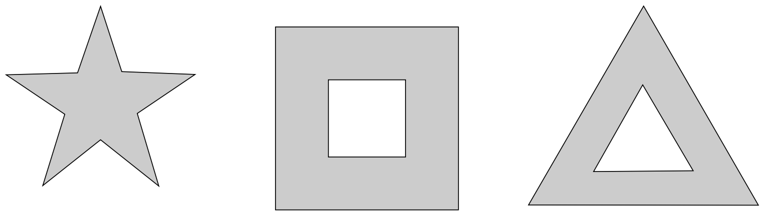
Konstruktor twierdzi, że przy jeździe po prostej taki wagon nie może się przewrócić, ani nawet pochylić. Pochylenie wagonu oznaczałoby bowiem, że wektor momentu pędu $\vec{J}$ (skierowany wzdłuż osi obrotu żyroskopu) obróciłby się w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku jazdy, a zatem jego zmiana $\Delta\vec{J}$ byłaby skierowana pionowo. Zgodnie ze wzorem $\vec{M} = \frac{\Delta\vec{J}}{\Delta t}$ wektor momentu siły $\vec{M}$ musiałby być także pionowy. Z drugiej strony, ponieważ siły oddziaływania szyn na wagon oraz siła ciężkości są pionowe, to wektor ich momentu $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ musi leżeć w płaszczyźnie poziomej. Ta sprzeczność oznacza, że wagon się nie przechyli. Czy konstruktor ma rację?

Rozwiązanie 9

Konstruktor nie ma racji. Niezrównoważony moment sił skierowany w kierunku ruchu wagonu powodowałby zmianę momentu pędu żyroskopu o wektor skierowany w tę samą stronę. Taka zmiana wymaga obrotu osi obrotu żyroskopu w płaszczyźnie poziomej. A to oznaczałoby obrót całego wagonu wokół osi pionowej. Temu obrotowi przeciwstawiają się kryzy na kołach jezdnych, co w sumie oznacza, że na wagon działa pionowo skierowany moment sił pochodzący od szyn. A przy takim momencie sił przewrócenie wagonu na bok jest już możliwe.

Zadanie 10

Mamy trzy graniastosłupy prawidłowe o dużej wysokości, o podstawach przedstawionych na rysunku 3. Pola powierzchni podstaw i zewnętrzne obwody każdej z podstaw są takie same.



rys. 3

Graniastosłupy ogrzano do tej samej temperatury i umieszczono w próżni w dużej odległości od siebie i od innych ciał. Tempo stygnięcia którego graniastosłupa będzie najmniejsze, a którego największe?

Graniastosłupy są wykonane z identycznego materiału o nieskończonym przewodnictwie cieplnym.

Rozwiązanie 10

Otwór wewnątrz graniastosłupa nie ma wpływu na stygnięcie, bo całe promieniowanie emitowane do otworu jest pochłaniane przez jego ścianki (ponieważ graniastosłupy mają dużą wysokość, pomijamy promieniowanie emitowane w pobliżu ich podstaw). W przypadku graniastosłupa o podstawie gwiazdy część promieniowania wyemitowanego przez jego powierzchnię boczną jest przez tenże graniastosłup pochłaniana. Zatem najwolniej będzie stygnąć graniastosłup o podstawie gwiazdy. Szybkości stygnięcia pozostałych graniastosłupów będą większe i równe sobie.

Zadanie 11

Czas gotowania ziemniaków (od momentu zagotowania się wody do momentu uzyskania przez nie odpowiedniej miękkości) wynosi 20 min. Ile będzie wynosił czas gotowania tych ziemniaków, jeśli dwukrotnie zwiększymy ciepło dostarczane do garnka w jednostce czasu?

Rozwiązanie 11

Czas się nie zmieni, bo temperatura wody tuż przy powierzchni ziemniaka w obu przypadkach wynosi 100°C, a od niej zależy ilość ciepła wnikającego do jego wnetrza.

Zadanie 12

Stwierdzono, że gdy temperatura powietrza rośnie wraz z wysokością nad powierzchnią Ziemi (np. w letnią, gwiaździstą noc), to zasięg dźwięku jest znacznie większy, niż gdy temperatura powietrza maleje wraz z wysokością nad powierzchnią Ziemi (np. w upalny dzień). Jak wytłumaczyć takie zjawisko?

Rozwiązanie 12

Ze wzrostem temperatury rośnie prędkość dźwięku w ośrodku, co oznacza malenie "współczynnika załamania" dla dźwięku. W przypadku gdy temperatura powietrza rośnie z wysokością, powietrze działa jak soczewka odchylająca dźwięk w dół. W efekcie do odległego słuchacza dochodzi dźwięk poprzez wyższe warstwy powietrza, nie tłumiony przez obiekty znajdujące się tuż nad ziemią. W przypadku temperatury malejącej z wysokościa, dźwięk wysyłany przez źródło znajdujące się na ziemi jest odchylany do góry i nie może bezpośrednio dolecieć do odległego odbiornika (też znajdującego się na ziemi). Ten efekt nie będzie zachodził, jeśli zarówno źródło jak i odbiornik będą się znajdowały na odpowiedniej wysokości nad ziemią.

Zadanie 13

Pręt o długości l wisi poziomo na dwóch równoległych sznurkach, przyczepionych do pręta w odległościach $l/4$ od jego końców. Tuż po przecięciu jednego ze sznurków, siła naciągu drugiego sznurka: a) wzrośnie; b) zmaleje; c) nie zmieni się.

Rozwiązanie 13

I sposób: Tuż po przecięciu pierwszego sznurka, punkt zawieszenia pręta na drugim sznurku staje się chwilową osią obrotu. Otrzymujemy równania dynamiczne na przyspieszenie a środka masy pręta i jego przyspieszenie kątowe ϵ

$$\begin{aligned} ma &= mg - N, \\ I\epsilon &= Nd, \end{aligned} \tag{1}$$

gdzie N jest szukaną siłą naciągu, $d = l/4$ jest odległością środka masy od punktu zawieszenia pręta a $I = (1/12)ml^2$ jest momentem bezwładności pręta względem jego środka masy. Uwzględniając, że $a = \epsilon d$ i rozwiązując ten układ równań dostajemy

$$N = \frac{mg}{1 + md^2/I}.$$

Dla $I = (1/12)ml^2$, $d = l/4$ otrzymamy $N = (4/7)mg > (1/2)mg$, a więc siła wzrośnie.

II sposób: Zauważmy, że gdyby pręt składał się z dwóch stykających się ze sobą, ale nie połączonych połówek (każda wisząca na "swoim" sznurku), to w sytuacji przed przecięciem sznurka rozkład sił byłby identyczny z przypadkiem rozważanym w treści zadania, a układ nadal byłby w stanie równowagi. W tym przypadku przecięcie jednego ze sznurków nie spowodowałoby zmiany siły naciągu drugiego sznurka. Ponieważ jednak w przypadku podanym w treści zadania obie połówki pręta są ze sobą połączone, to "spadająca połowa pręta" ciągnie za sobą drugą połowę, co oznacza, że siła naciągu drugiego sznurka wzrośnie. (Ta metoda rozwiązania ma zastosowanie tylko w przypadku, gdy nici są zawieszone w odległości $l/4$ od końca pręta .)

Czyli prawidłowa jest odpowiedź a).

Zadanie 14

Rakieta wodna składa się plastikowej butelki wypełnionej częściowo wodą i przymocowanej do butelki listewki. Butelka jest zatkana korkiem przebitym igłą do pompowania piłek, przez którą pompujemy powietrze do wnętrza butelki. Rakieta startuje, gdy ciśnienie wewnątrz butelki wypchnie korek. Zakładając, że to ciśnienie wynosi 2atm, podać w którym przypadku rakieta poleci wyżej:

a) gdy jest wypełniona w $\frac{1}{4}$ objętości wodą; b) gdy jest wypełniona w $\frac{3}{4}$ objętości wodą.

Rozwiązanie 14

Porównajmy sytuacje, gdy z obu butelek wyleciało już tyle samo wody. Ciśnienie powietrza wewnątrz butelki w przypadku a) będzie większe, niż w przypadku b), co oznacza, że woda będzie wylatywać w przypadku a) z większą prędkością. Jednocześnie całkowita masa rakiety (masa butelki wraz ze znajdującą się jeszcze wewnątrz niej wodą oraz masa listewki) w przypadku b) będzie większa. Oznacza to, że do momentu, gdy z rakiety wyleci objętość wody równa

1/4 objętości butelki, każdorazowy przyrost prędkości rakiety spowodowany wyrzuceniem tej samej w obu przypadkach, małej ilości wody będzie większy w przypadku a), czyli do tego momentu rakieta a) osiągnie większą prędkość. Ale w tym końcowym momencie "silnik rakietowy" rakiety b) nie będzie już działał, bo ciśnienie w jej wnętrzu spadnie do ciśnienia atmosferycznego (przy założeniu rozprężania izotermicznego – dokładnie w tej chwili, przy bardziej realistycznym założeniu rozprężania adiabatycznego – nawet wcześniej). Skoro w przypadku a) rakieta osiągnie większą prędkość, oznacza to również, że wyżej poleci.

Czyli prawidłowa jest odpowiedź a).

Zadanie 15

Powszechnie przyjmuje się, że ruch poduszkowca (po poziomej powierzchni, gdy ruch jest na tyle powolny, że można pominąć opór powietrza) jest dobrym przybliżeniem ruchu bez sił oporu. Czy to stwierdzenie dotyczy również poduszkowców poruszających się wolno po spokojnej powierzchni wody? Czy pod działaniem danej siły poziomej poduszkowiec unoszący się nad powierzchnią wody uzyska takie samo przyspieszenie, jak poduszkowiec unoszący się nad twardą powierzchnią?

Rozwiązanie 15

Nieporuszający się poduszkowiec zgodnie z zasadami hydrostatyki wytwarza w wodzie pod sobą "dołek", analogicznie jak to robi zwykła łódka. Wolno przesuwajacy się poduszkowiec przesuwa znajdujacy się pod nim dołek, a do tego niezbędna jest siła. W szczególności ruch przyspieszony wymaga "przyspieszenia" dołka. Gdy poduszkowiec porusza się szybko, przybliżenie statyczne jest nieadekwatne — "dołek" robi się coraz mniejszy i maleje związana z tworzeniem się go siła.

Czyli zarówno przesuwanie jak i przyspieszanie poduszkowca "unoszącego się" nad powierzchnią wody wymaga większych sił, niż w przypadku poduszkowca unoszącego się nad twardą, poziomą powierzchnią.