

LIV OLIMPIADA FIZYCZNA

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

CZEŚĆ TEORETYCZNA

Źródła:

- Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
- T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Zadanie T2

Wąska wiązka fullerenów – cząsteczek węgla C_{60} w kształcie piłki futbolowej – pada prostopadle na siatkę dyfrakcyjną o stałej siatki $d = 100$ nm (siatkę dyfrakcyjną jest płytka z azotku krzemu z wyciętymi równoległymi wąskimi szczelinami). Za siatką znajdują się detektory zliczające cząsteczki docierające do poszczególnych punktów płaszczyzny („ekranu”) znajdującej się w dużej odległości od siatki i równoległej do niej. Wskazania detektorów służą do wyznaczenia powstającego obrazu interferencyjnego.

a) Przyjmując, że rozkład prędkości cząsteczek v w wiązce jest rozkładem jednolitym w zakresie $v \in [v_0 - \Delta v, v_0 + \Delta v]$, wyznacz kąt ugięcia wiązki α_n odpowiadający położeniu środka prążka interferencyjnego n -tego rzędu oraz kąt $\Delta\alpha_n$ odpowiadający szerokości tego prążka (prążek jest obszarem, do którego dolatują cząsteczki). Podaj wartości liczbowe dla $n = 1$, $v_0 = 117$ m/s, $\Delta v = 0,17v_0$. Rozważ tylko te prążki, dla których $\sin \alpha_n \approx \alpha_n$.

b) Jaki jest dopuszczalny rozrzut Δv prędkości cząsteczek w wiązce (przy ustalonym v_0), aby prążek n -tego rzędu był dobrze rozróżnialny, tzn. aby po obu jego stronach były miejsca, do których nie docierają cząsteczki?

Zakładamy, że każda z cząsteczek ma dokładnie określony pęd. Masa atomu węgla jest równa $2,0 \cdot 10^{-26}$ kg, stała Plancka $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Js.

Rozwiązanie zadania T2

Prążki interferencyjne pojawiają się, gdy różnica faz fal (de Broglie’a) wychodzących z sąsiednich szczelin siatki jest równa wielokrotności 2π , czyli gdy kąt ugięcia wiązki α spełnia warunek

$$d \sin \alpha = n\lambda, \quad (1)$$

gdzie n jest liczbą całkowitą, a λ – długością fali de Broglie’a cząsteczki o masie m i prędkości v :

$$\lambda = \frac{h}{mv}, \quad (2)$$

(h jest stałą Plancka).

a) Dla wiązki cząsteczek o jednakowych prędkościach (i idealnej siatki dyfrakcyjnej, o dużej liczbie szczelin) każdy prążek jest nieskończenie cienki. Jednak w naszym przypadku, ze względu na różne prędkości cząsteczek wiązki, prążek n -tego rzędu będziemy obserwować dla kątów ugięcia α od α_n^- do α_n^+ , gdzie

$$d \sin \alpha_n^+ = n \frac{h}{m(v_0 + \Delta v)} \approx d\alpha_n^+, \quad (3)$$

$$d \sin \alpha_n^- = n \frac{h}{m(v_0 - \Delta v)} \approx d\alpha_n^-. \quad (4)$$

Zatem kąt odpowiadający położeniu środka prążka n-tego rzędu jest dany wzorem

$$\alpha_n = \frac{1}{2} n \frac{h}{md} \left(\frac{1}{v_0 - \Delta v} + \frac{1}{v_0 + \Delta v} \right) = n \frac{h}{md} \frac{v_0}{v_0^2 - (\Delta v)^2}, \quad (5)$$

a kąt odpowiadający szerokości tego prążka wzorem

$$\Delta\alpha_n = n \frac{h}{md} \left(\frac{1}{v_0 - \Delta v} - \frac{1}{v_0 + \Delta v} \right) = n \frac{h}{md} \frac{2\Delta v}{v_0^2 - (\Delta v)^2}. \quad (6)$$

Dla podanych wartości liczbowych otrzymujemy (w radianach)

$$\alpha_1 \approx 4,8 \cdot 10^{-5}, \quad (7)$$

$$\Delta\alpha_1 \approx 1,6 \cdot 10^{-5}. \quad (8)$$

b) Na ekranie, między n-tym a n+1 prążkiem będą miejsca, do których nie dolatują cząsteczki, jeśli

$$\alpha_n^- < \alpha_{n+1}^+, \quad (9)$$

czyli

$$n \frac{h}{md} \frac{1}{v_0 - \Delta v} < (n+1) \frac{h}{md} \frac{1}{v_0 + \Delta v}, \quad (10)$$

co daje

$$\Delta v < \frac{v_0}{2n+1}. \quad (11)$$

Jeśli powyższa nierówność będzie spełniona, to również między n-1 a n-tym prążkiem będzie obszar, do którego nie dolatują cząsteczki. Zatem wzór (8) jest szukanym warunkiem na dopuszczalny rozrzut prędkości.

Punktacja

a)

Związek między długością fali a prędkością cząsteczek (wzór (2)) 1 pkt.

Wzór (1) na położenie prążków interferencyjnych 1 pkt.

Wyznaczenie położenia środka n-tego prążka (wzór (3)) wraz z wyn. liczb. (wzór (5)) 2 pkt.

Wyznaczenie szerokości n-tego prążka (wzór (4)) wraz z wyn. liczb. (wzór (6)) 1 pkt.

b)

Warunek (wzór (7) lub równoważny), przy spełnieniu którego nie ma detekcji cząsteczek między prążkami 1 pkt.

Końcowy warunek na Δv (wzór (8)) 2 pkt.

Wyjaśnienie, że przy spełnieniu warunku (8) również między n-1 a n-tym prążkiem nie ma detekcji cząsteczek 1 pkt.