

LIV OLIMPIADA FIZYCZNA

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

CZEŚĆ TEORETYCZNA

Źródła:

- Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
- T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Zadanie 3

Rozważmy gumowy balonik, który po nadmuchaniu powietrzem ma kształt kuli.

a) Gdy promień balonika wynosił $r_1 = 0,1$ m, to wewnątrz panowało ciśnienie $p_1 = 1,1 \cdot 10^5$ Pa. Jakie ciśnienie panuje wewnątrz balonika po nadmuchaniu go tak, by miał promień

$$r_2 = \frac{3}{2}r_1? \quad (1)$$

W obu przypadkach temperatura powietrza wewnątrz balonika jest równa temperaturze otoczenia $T_0 = 300$ K. Ciśnienie powietrza otaczającego balonik jest równe $p_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Pa.

b) Balonik o promieniu r_2 (czyli po nadmuchaniu zgodnie z pkt. a) zanurzono powoli w wodzie na taką głębokość, by jego promień zmalał do $r_3 = r_1$. Ile wynosi ta głębokość? Jakie są temperatura i ciśnienie wewnątrz balonika po zanurzeniu?

Zakładamy, że powłoka balonika nie przepuszcza ciepła. Początkowa temperatura wewnątrz balonika była równa T_0 . Balonik przed zanurzeniem znajdował się tuż nad powierzchnią wody.

c) Jaką pracę wykonano w trakcie zanurzania zgodnie z pkt. b)?

Energia sprężysta gumy, z której jest wykonany balonik, jest równa

$$E_s = \frac{1}{2}\alpha S^2, \quad (2)$$

gdzie α jest pewną stałą, a S – powierzchnią balonika. Balonik ma wciąż kształt kuli. Przyjmij, że powietrze zachowuje się jak gaz doskonały o molowym cieple właściwym przy stałej objętości $c_V = \frac{5}{2}R$. Guma ma zanedbywalną masę oraz pojemność cieplną. Zanedbujemy także gęstość powietrza w porównaniu z gęstością wody $d_w = 1000$ kg/m³. Przyspieszenie ziemskie $g = 9,8$ m/s².

Rozwiązanie zadania T3

a) W stanie równowagi, przy infinitezymalnej zmianie promienia o dr , suma prac sił ciśnienia wewnętrznego i zewnętrznego jest równa zmianie energii sprężystości:

$$(p - p_0) dV = dE_s, \quad (3)$$

czyli

$$(p - p_0) 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2}\alpha(4\pi)^2 4r^3 dr, \quad (4)$$

co daje

$$p - p_0 = 8\pi\alpha r. \quad (5)$$

Dla promieni r_1 i r_2 :

$$p_1 - p_0 = 8\pi\alpha r_1, \quad p_2 - p_0 = 8\pi\alpha r_2. \quad (6)$$

Zatem:

$$\frac{p_2 - p_0}{p_1 - p_0} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (7)$$

Ostatecznie:

$$p_2 = \frac{r_2}{r_1}(p_1 - p_0) + p_0 = 1,15 \cdot 10^5 \text{ Pa}. \quad (8)$$

b) Ponieważ w tym procesie nie ma przepływu ciepła, a zanurzenie odbywa się powoli, z równania adiabaty $pV^\kappa = \text{const}$ mamy:

$$p_2 \left(\frac{4}{3}\pi r_2^3 \right)^\kappa = p_3 \left(\frac{4}{3}\pi r_3^3 \right)^\kappa, \quad (9)$$

gdzie $\kappa = \frac{c_V + R}{c_V} = \frac{7}{5}$.

Stąd:

$$p_3 = p_2 \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^{3\kappa} \approx 6,3 \cdot 10^5 \text{ Pa}. \quad (10)$$

Ciśnienie wody na zewnątrz balonika:

$$p_w = p_3 - 8\pi\alpha r_3 = p_3 - (p_1 - p_0) \approx 6,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}. \quad (11)$$

W wodzie ciśnienie wynosi:

$$p = p_0 + d_w g h, \quad (12)$$

zatem głębokość:

$$h = \frac{p_w - p_0}{d_w g} \approx 53 \text{ m}. \quad (13)$$

Temperatura gazu po zanurzeniu:

$$T_3 = \frac{p_3 V_3}{nR} = \frac{p_3 V_3 T_0}{p_2 V_2} = \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\kappa-1} T_0 = \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^{3(\kappa-1)} T_0 \approx 488 \text{ K}. \quad (14)$$

c) I sposób

Praca wykonana przy zanurzaniu:

$$W = \Delta E_g + \Delta E_s + \Delta E_o, \quad (15)$$

gdzie

$$\Delta E_g = n c_V (T_3 - T_0), \quad (16)$$

$$\Delta E_s = 8\pi^2\alpha(r_3^4 - r_2^4), \quad (17)$$

$$\Delta E_o = -\frac{4}{3}\pi p_0 r_2^3 + \frac{4}{3}\pi p_w r_3^3. \quad (18)$$

Po podstawieniu:

$$W = 3,6 \cdot 10^3 \text{ J}. \quad (19)$$

c) II sposób

Siła wyporu:

$$F_w = \frac{4}{3}\pi r^3 d_w g. \quad (20)$$

Po przeprowadzeniu całkowania:

$$W = \frac{4}{3}\pi p_2 \frac{c_V + R}{R} r_2^3 \left[\left(\frac{r_2}{r_3} \right)^{3\kappa-3} - 1 \right] - \frac{\pi}{3} (p_1 - p_0) \frac{r_3^4 - r_2^4}{r_1}, \quad (21)$$

co zgadza się z wynikiem z metody I.

$$W \approx 3,6 \cdot 10^3 \text{ J} \quad (22)$$