Zadanie 3

Klocek o masie M porusza się poziomo, bez tarcia, wzdłuż linii prostej. W chwilach t_i, $i = 1, 2, ...$ z klockiem zderzają sie idealnie sprężyście ciała o masie m. Prędkości tych ciał przed zderzeniem wynoszą u_i i są równoległe do kierunku ruchu klocka. Niech V_i będzie prędkością klocka tuż przed zderzeniem w chwili t_i.

a) Znajdź związek między V_{i+1} a V_i.

b) Przyjmując, że $u_i = (-1)^i u$ i przy założeniu, że znasz V_1, wyznacz V_n dla bardzo dużych n.

Rozwiązanie zadania 3

a) Niech u_i' będzie prędkością ciała o masie m po zderzeniu w chwili t_i. Korzystając z zasad zachowania pędu

$$MV_i + mu_i = MV_{i+1} + mu_i', \tag{7}$$

i energii

$$\frac{1}{2}MV_i^2 + \frac{1}{2}mu_i^2 = \frac{1}{2}MV_{i+1}^2 + \frac{1}{2}m\left(u_i'\right)^2, \tag{8}$$

otrzymamy (warto przy tym skorzystać z wynikającego z powyższych równań związku $V_i + V_{i+1} = u_i + u_i'$)

$$V_{i+1} = \frac{M-m}{M+m}V_i + \frac{2m}{M+m}u_i. \tag{9}$$

b) Z powyższego

$$V_{n+1} = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^n V_1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^{n-i}\frac{2m}{M+m}u_i. \tag{10}$$

Przyjmując $u_i = (-1)^i u$ otrzymujemy w granicy dużych n

$$V_{n+1} = 0 + \frac{2m}{M+m}u\,(-1)^n\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-n}\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^{n-i} \approx \tag{11}$$

$$\approx \frac{2m}{M+m}u\,(-1)^n\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{M-m}{M+m}\right)^j = \tag{12}$$

$$= \frac{2m}{M+m}u\,(-1)^n\frac{1}{1+\frac{M-m}{M+m}} = (-1)^n\frac{m}{M}u. \tag{13}$$

Czyli ostatecznie

$$V_n = (-1)^{n-1}\frac{m}{M}u. \tag{14}$$

Oznacza to, że przy dużych n klocek nie będzie "pamiętał" swojej prędkości początkowej. Wartość jego prędkości po każdym zderzeniu będzie taka sama, a jej zwrot będzie zgodny ze zwrotem prędkości ciała, z którym zderzył się ostatnio.