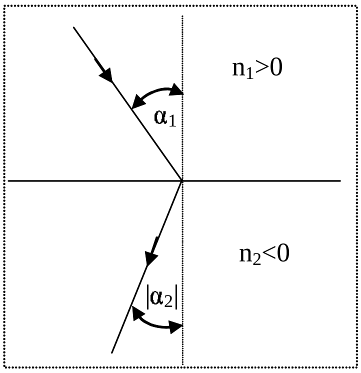
Zadanie 1

Pewne sztucznie wytworzone materiały mogą mieć w wąskim zakresie częstotliwości fal elektromagnetycznych ujemny współczynnik załamania (dla mikrofal są to metamateriały utworzone z układów drutów a dla światła widzialnego tzw. kryształy fotoniczne). Przy przejściu z ośrodka o współczynniku załamania $n_1 > 0$ do ośrodka o współczynniku załamania $n_2 < 0$ jest spełnione zwykłe prawo załamania $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$, przy czym $\alpha_2 < 0$ – patrz rysunek.



a) Mały przedmiot umieszczono w odległości a_p od płaskorównoległej płytki o grubości d wykonanej z materiału o współczynniku załamania równym -1. Rozważmy obraz utworzony przez promienie, które przeszły przez płytkę. Znajdź jego położenie, powiększenie i ustawienie (tzn. czy jest on odbity, obrócony...). Dla jakich a_p rozważany obraz jest rzeczywisty?

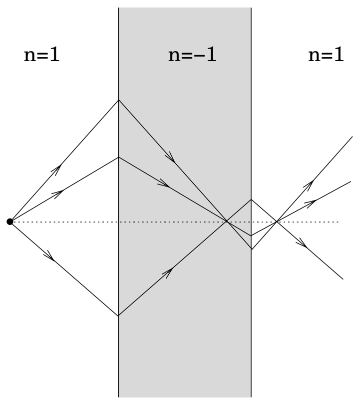
b) Mały przedmiot umieszczono w punkcie o współrzędnych $(a_p, -b_p, 0)$ (gdzie $a_p > 0, b_p > 0$). Obszar przestrzeni spełniający równania $x > 0$, $y > 0$ jest wypełniony ośrodkiem o współczynniku załamania równym -1. Znajdź położenie, powiększenie i ustawienie obrazu tego przedmiotu, utworzonego przez promienie, które wyszły z obszaru o $n = -1$. Z jakich miejsc można zobaczyć ten obraz? Rozważ tylko promienie w płaszczyźnie $z = 0$.

W obu przypadkach narysuj bieg różnych promieni wybiegających z przedmiotu i przechodzących przez obszar o $n = -1$.

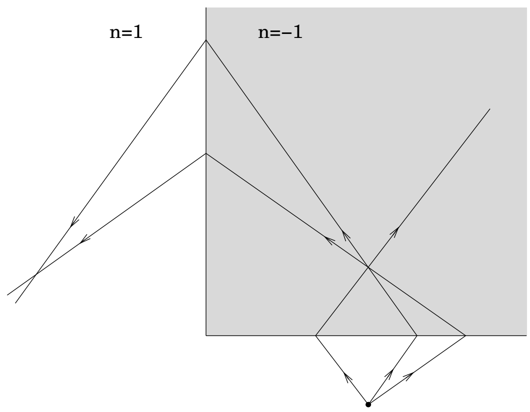
Współczynnik załamania przestrzeni poza płytką (w pkt. a)) i poza obszarem $x > 0$, $y > 0$ (w punkcie b)) jest równy 1.

Rozwiązanie zadania 1

Zauważmy, że dla współczynnika załamania równego -1 kąt załamania jest równy minus kątowi padania, tzn. bieg promienia jest taki, jakby odbił się od lustra prostopadłego do płaszczyzny rozdziału ośrodków.



rys. 1 Bieg promieni światła w przypadku a).



rys. 2 Bieg promieni światła w przypadku b).

I sposób rozwiązania

Ze względu na związek $\alpha_2 = -\alpha_1$ promienie wychodzące z danego punktu, po załamaniu na granicy ośrodków, skupiają się (one lub ich przedłużenie) w punkcie symetrycznym względem

płaszczyzny rozdziału ośrodków. Zatem obraz przedmiotu utworzony przez promienie załamane na granicy ośrodków otrzymujemy przez odbicie przedmiotu względem płaszczyzny rozdziału ośrodków. Przyjmijmy, że granice płytki są określone równaniami $x = 0$ oraz $x = d$.
a) Zgodnie z powyższymi rozważaniami jeśli $(-a_p, 0)$ jest położeniem przedmiotu, to wychodzące z niego promienie (lub ich przedłużenia) po przejściu przez granicę otoczenie-płytka skupią się w punkcie $(a_p, 0)$ (odbicie względem płaszczyzny $x = 0$). Po przejściu przez granicę płytka-otoczenie znajdującą się w $x = d$, skupią się one w punkcie $(d - (x - d), 0)$ (odbicie względem płaszczyzny $x = d$). Zatem obraz przedmiotu, utworzony przez promienie, które przeszły przez płytkę, będzie się znajdował w punkcie

$$(2d - a_p, 0). \tag{1}$$

Obraz ten będzie rzeczywisty jeśli $2d - a_p > d$, czyli dla $a_p < d$. Można go otrzymać przez równoległe przesunięcie przedmiotu o $2d$ w kierunku płytki, a więc jest to obraz nieodwrócony i o niezmienionej wielkości.
b) Po przejściu przez granicę otoczenie-płytka w $y = 0$ promienie skupią się w punkcie (a_p, b_p), a następnie po przejściu przez granicę w $x = 0$ skupią się w punkcie

$$(-a_p, b_p). \tag{2}$$

Otrzymany obraz będzie odwróceniem przedmiotu o kąt 180^o wokół osi $x = 0$, $y = 0$. Jednak tylko promienie wychodzące z przedmiotu, które początkowo oddalały się od osi Y mogą dolecieć do punktu $(-a_p, b_p)$. Zatem ten obraz może być widoczny tylko z punktów (x, y) spełniających warunki $x < -a_p$, $y < b_p$.

II sposób rozwiązania

a) Rozważmy zagadnienie w płaszczyźnie biegu promienia. Niech $(-a_p,\ 0)$ będzie położeniem przedmiotu, $(0,\ z_1)$ – punktem, w którym promień wysłany z przedmiotu wchodzi do płytki, $(d,\ z_2)$ – punktem w którym ten promień wychodzi z płytki, $(a_o, y_o,)$ – położeniem obrazu, a α – kątem padania tego promienia na płytkę.
Z rozważań geometrycznych dostajemy

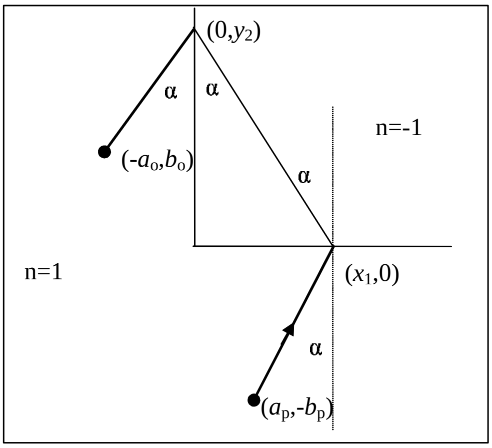
$$z_1 = x\operatorname{tg}\alpha, \tag{3}$$
$$z_2 = z_1 - d\operatorname{tg}\alpha, \tag{4}$$
$$z_o = z_2 + (a_o - d)\operatorname{tg}\alpha. \tag{5}$$

Z powyższego
$$z_o = (x - d + a_o - d)\operatorname{tg}\alpha.$$

Ponieważ to równanie ma być spełnione dla różnych α , otrzymujemy $z_o = 0$ (co było do przewidzenia), oraz
$$a_o = 2d - a_p.$$

Obraz jest rzeczywisty, gdy $a_o > d$, czyli dla $a_p < d$. Obraz ten otrzymujemy przez równoległe przesunięcie przedmiotu o $2d$ w kierunku płytki, a więc jest to obraz nieodwrócony i o nie zmienionej wielkości.
Ciekawe jest to, że w tym szczególnym przypadku wszystkie wychodzące ze źródła promienie które padają na płytkę, zbiegają się w punkcie $(a_o, 0)$ – w przypadku gdy współczynnik załamania płytki $n \neq -1$ dotyczy to tylko promieni przyosiowych (małe α).
b) Rozważmy promień wylatujący z naszego przedmiotu pod kątem α w stosunku do osi OX. Przyjmijmy, że promień biegnie przez punkty $(x_1, 0)$, $(0, y_2)$, $(-a_o, b_o)$ (patrz rysunek 3).
Otrzymujemy

$$x_1 = a_p + b_p\operatorname{tg}\alpha, \tag{6}$$
$$y_2 = x_1\operatorname{ctg}\alpha, \tag{7}$$
$$y_2 = b_o + a_o\operatorname{ctg}\alpha \tag{8}$$



rys. 3

Stąd

$$y_2 = b_o + a_o \text{ctg}\,\alpha = \text{x}_1 \text{ctg}\,\alpha = (\text{a}_\text{p} + \text{b}_\text{p} \text{tg}\,\alpha)\,\text{ctg}\,\alpha.$$

Zatem

$$b_o + a_o \text{ctg}\,\alpha = \text{a}_\text{p} \text{ctg}\,\alpha + \text{b}_\text{p}.$$

Jeśli punkt $(-a_o, b_o)$ jest obrazem punktu $(a_p, -b_p)$, to promienie światła wysłane pod różnymi kątami z tego drugiego punktu dochodzą od tego pierwszego. Oznacza to, że

$$b_o = b_p,\ \ a_o = a_p.$$

Zatem położenie punktu obrazowego otrzymujemy przez obrót punktu źródła o kąt π wokół osi $x = 0 = y$.

Gdy rozważymy przedmiot składający się z wielu punktów, to jego obraz otrzymamy też przez obrót przedmiotu o kąt π wokół osi $x = 0 = y$. Jest to obraz o niezmienionej wielkości i obrócony, ale obrócony w innym sensie niż zwykle rozumiemy to w optyce (w przypadku zwykłych soczewek mówiąc o obrazie odwróconym mamy na myśli, że obraz jest odbiciem przedmiotu względem osi optycznej.

Podobnie jak w przypadku a) promienie wysłane z punktu $(a_p, -b_p)$ dokładnie schodzą się w punkcie $(-a_o, b_o)$, ale dotyczy to tylko promieni o $\alpha > 0$. Gdy $\alpha \leqslant 0$ (promienie wysyłane w lewo i oraz do góry), promień padający na "pryzmat" nie przedostaje się do obszaru $x < 0$. Oznacza to, że obraz jest widoczny tylko z punktów (x, y) spełniających warunki $x + a_o < 0$, $y - b_o < 0$.