Zadanie 1

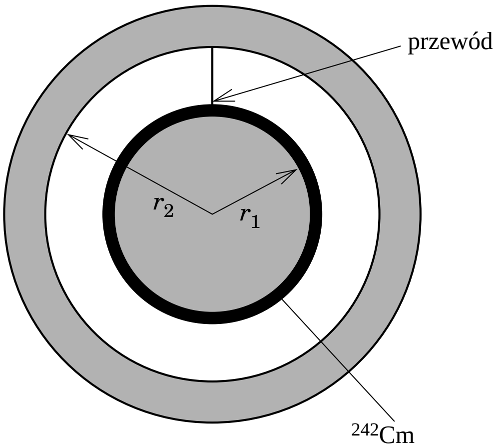
Metalowa kulka o promieniu $r_1 = 10\,\mathrm{cm}$ jest otoczona, współśrodkową z nią, metalową, sferyczną powłoką o promieniu wewnetrznym $r_2 = 2r_1$ (patrz rys. 1). Między powłoką a kulką panuje próżnia. Kulka jest pokryta cienką, równomierną warstwą izotopu kiuru $^{242}\mathrm{Cm}$ w ilości $n = 0,01\,\mathrm{mola}$. Jądro $^{242}\mathrm{Cm}$ rozpada się wysyłając cząstkę alfa o energii $E_0 \approx 6,1\,\mathrm{MeV}$. Czas połowicznego zaniku kiuru wynosi $t_{1/2} = 163\,\mathrm{dni}$. Powłoka jest połączona z kulką biegnącym radialnie cienkim przewodem. Przyjmujemy, że obecność przewodu i płynący w nim prąd nie wpływają na pole elektryczne między powłokami. Cząstki alfa są całkowicie pochłaniane przez powłokę oraz kulkę, ale nie są pochłaniane ani rozpraszane przez kiur.

a) Jakie jest natężenie prądu płynącego w przewodzie, jeśli jego opór jest równy $R_1 = 100\,\mathrm{k\Omega}$?

b) Jaki powinien być opór R_2 przewodu, aby natężenie płynącego w nim prądu było równe połowie natężenia prądu określonego w pkt. a)?

Liczba Avogadro $N_\mathrm{A} \approx 6,0 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$, wartość ładunku elektronu $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$. Pomijamy emisję elektronów z kulki i otaczającej ją powłoki.

Rozważamy sytuację stacjonarną, tzn. po (przybliżonym) ustaleniu się natężenia prądu w przewodzie, przez czas mały w porównaniu z $t_{1/2}$.



rys. 1

Zadanie 2

Pręt o długości l i masie m położono na równi o kącie nachylenia α (patrz rys. 2), na wysokości h nad podłogą (przy czym $h \gg l$).

a) Opisz jakościowo ruch pręta.

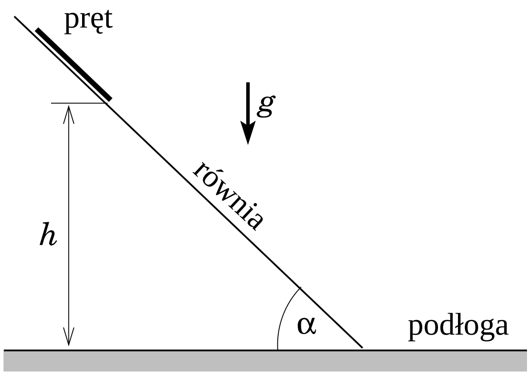
b) Wyznacz prędkość pręta w ostatniej fazie ruchu. Podaj wartość liczbową dla $h = 6,4\,\mathrm{m}$, $\alpha = 45^\circ$, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ (przyspieszenie ziemskie).

Tarcie i opór powietrza zaniedbujemy. Pręt jest idealnie sztywny i cały czas znajduje się w płaszczyźnie pionowej prostopadłej do powierzchni równi. Podłoga i równia idealnie amortyzują uderzenia, tzn. powodują że tuż po uderzeniu prostopadła do nich składowa prędkości uderzanego punktu jest równa 0, a ich ugięcie w trakcie uderzenia jest znikomo małe.

Moment bezwładności pręta względem środka masy jest równy $I = (1/12)ml^2$. W chwili początkowej pręt spoczywał. Kąt nachylenia spełnia warunek $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, przy czym α nie jest bliskie 90°.

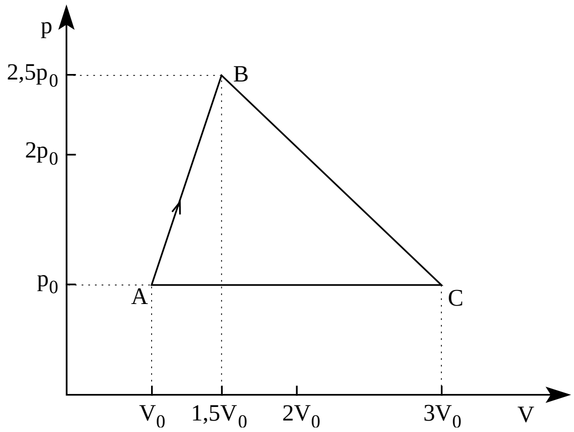
Zadanie 3

Pewien konstruktor zbudował skomplikowany silnik cieplny, którego czynnikiem roboczym jest n moli jednoatomowego gazu doskonałego (molowe ciepło właściwe równe $(3/2)R$) pracującego w cyklu tworzącym na wykresie $p - V$ trójkąt ABC o wierzchołkach w punktach (V_0, p_0), $((3/2)V_0, (5/2)p_0)$, $(3V_0, p_0)$ (patrz rys. 3). Gaz pobiera ciepło ze źródła ciepła o temperaturze



rys. 2

T_1 i oddaje je do chłodnicy o temperaturze T_2. Przyjmujemy, że gaz jest w każdym momencie cyklu w stanie równowagi termodynamicznej i pomijamy wszelkie opory mechanizmów.
a) Oblicz sprawność tego silnika.
b) Jakie warunki muszą spełniać temperatury T_1 i T_2 aby silnik pracował?



rys. 3

Rozwiązane zadania 1

Przyjmijmy, że różnica potencjałów elektrostatycznych miedzy powłoką a kulką jest równa U. Jeśli v_{r1} i $v_{\perp 1}$ są radialną i prostopadłą do radialnej składową prędkości v_1 cząstki alfa w chwili rozpadu, a v_{r2} i $v_{\perp 2}$ – analogicznymi składowymi prędkości w chwili, gdy cząstka dociera do powłoki, to z zasady zachowania energii

$$\frac{m}{2}\left(v_{r1}^2+v_{\perp 1}^2\right)=\frac{m}{2}\left(v_{r2}^2+v_{\perp 2}^2\right)+qU, \tag{1}$$

gdzie $q=2e$ jest ładunkiem cząstki alfa, a z zasady zachowania momentu pędu

$$mr_1v_{\perp 1}=mr_2v_{\perp 2}. \tag{2}$$

Ponieważ $v_{r2}^2\geqslant 0$, do zewnętrznej powłoki dotrą tylko cząstki dla których

$$\frac{m}{2}\left(v_{r1}^2+v_{\perp 1}^2\right)-\frac{m}{2}v_{\perp 2}^2-qU=E_0-\frac{m}{2}\left(\frac{r_1}{r_2}v_{\perp 1}\right)^2-qU\geqslant 0, \tag{3}$$

gdzie wykorzystaliśmy $\frac{m}{2}\left(v_{r1}^2+v_{\perp 1}^2\right)=E_0$, oraz zasadę zachowania momentu pędu. Zatem do zewnętrznej powłoki dotrą cząstki, których prędkość spełnia warunek

$$\frac{\frac{m}{2}v_{\perp 1}^2}{E_0}\leqslant\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\cdot\left(1-\frac{qU}{E_0}\right). \tag{4}$$

Jeśli θ jest kątem między kierunkiem prędkości (w chwili emisji) i kierunkiem radialnym, to powyższy warunek oznacza

$$\sin^2\theta\leqslant\left(\frac{R}{r}\right)^2\cdot\left(1-\frac{qU}{E_0}\right). \tag{5}$$

Zauważmy, że dla

$$\frac{qU}{E_0}\leqslant 1-\frac{r_1^2}{r_2^2}, \tag{6}$$

powyższy warunek nie daje żadnego ograniczenia na kąt θ.
Cząstki alfa są emitowane losowo we wszystkich kierunkach; ilość cząstek wyemitowanych pod kątem nie większym niż θ jest proporcjonalna do powierzchni sfery ograniczonej przez ten kat, czyli do (dla sfery jednostkowej)

$$2\pi(1-\cos\theta).$$

Zauważmy jednak, że cząstki emitowane pod kątem większym niż $\frac{\pi}{2}$ są pochłaniane przez wewnętrzną powłokę, powinniśmy więc brać pod uwagę tylko cząstki wysyłane pod katem $\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$. Zatem dla $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ natężenie prądu cząstek alfa dolatujących do zewnetrznej powłoki wynosi

$$I=I_0\frac{2\pi\left(1-\cos\theta\right)}{4\pi}=\frac{I_0}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{r_2^2}{r_1^2}\cdot\left(1-\frac{qU}{E_0}\right)}\right), \tag{7}$$

gdzie I_0 jest iloczynem q i ilości rozpadów kiuru w ciągu sekundy:

$$I_0=q\left[\frac{d}{dt}nN_A\left(1-2^{-t/t_{1/2}}\right)\right]_{t=0}=qnN_A\frac{\ln 2}{t_{1/2}}. \tag{8}$$

Podsumowując

$$I=\begin{cases}\frac{I_0}{2} & \text{dla } \frac{qU}{E_0}\leqslant 1-\frac{r_1^2}{r_2^2},\\ \frac{I_0}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{r_2^2}{r_1^2}\cdot\left(1-\frac{qU}{E_0}\right)}\right) & \text{dla } 1>\frac{qU}{E_0}>1-\frac{r_1^2}{r_2^2}\\ 0 & \text{dla } \frac{qU}{E_0}\geqslant 1.\end{cases} \tag{9}$$

Ponieważ $t_{1/2} = 163 \cdot 24 \cdot 60^2\text{s} \approx 1,4 \cdot 10^7\text{s}$, otrzymujemy $I_0 \approx 2\frac{0{,}01 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}69}{1{,}4 \cdot 10^7}\,\text{A} = 9,5 \cdot 10^{-5}\,\text{A}$. Zauważmy, że $I_0 \cdot R_1 < \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) \cdot E_0/q$, zatem dla oporu R_1 mamy do czynienia z pierwszym z powyższych przypadków, tzn. przez przewód płynie maksymalny prąd równy

$$I_{\max} = \frac{I_o}{2} \approx 4,8 \cdot 10^{-5}\,\text{A}\,. \tag{10}$$

Natężenie prądu będzie równe połowie powyższego natężenia gdy U będzie spełniało warunek

$$1 - \sqrt{1 - \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \left(1 - \frac{qU}{E_0}\right)} = \frac{1}{2}, \tag{11}$$

czyli dla

$$U = \left(1 - \frac{3}{4}\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)\frac{E_0}{q}. \tag{12}$$

Zatem R_2 powinno być równe

$$R_2 = \frac{\left(1 - \frac{3}{4}\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)\frac{E_0}{q}}{I_0/4} \approx 1,0 \cdot 10^{11}\Omega. \tag{13}$$

Punktacja

Wyznaczenie maksymalnego prądu mogącego płynąć w układzie (wzory (10) i (8)) – 2 pkt.

Wypisanie zasady zachowania energii (wzór (1)) i zasady zachowania momentu pędu (wzór (2)) – 1 pkt.

Otrzymanie warunku na kąt, pod jakim powinna być emitowana cząstka α aby dotarła do powłoki (wzór (5)) – 2 pkt.

Zależność natężenia prądu od napięcia między powłoką a kulką (wzór (9)) – 2 pkt.

Uzasadnienie, że w przypadku a) natężenie prądu jest równe maksymalnej wartości – 1 pkt.

Wyznaczenie oporu R_2 (wzór (13)) – 2 pkt.