Zadanie 1

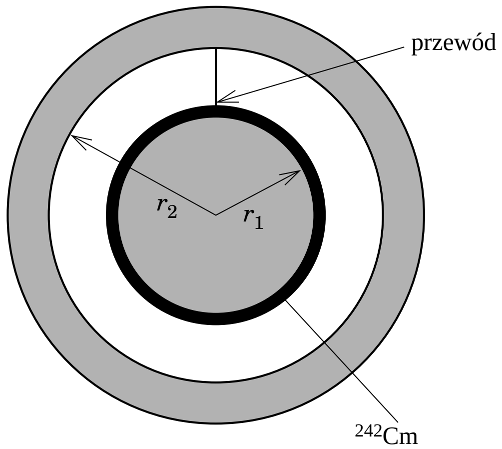
Metalowa kulka o promieniu $r_1 = 10\,\mathrm{cm}$ jest otoczona, współśrodkową z nią, metalową, sferyczną powłoką o promieniu wewnetrznym $r_2 = 2r_1$ (patrz rys. 1). Między powłoką a kulką panuje próżnia. Kulka jest pokryta cienką, równomierną warstwą izotopu kiuru $^{242}\mathrm{Cm}$ w ilości $n = 0,01\,\mathrm{mola}$. Jądro $^{242}\mathrm{Cm}$ rozpada się wysyłając cząstkę alfa o energii $E_0 \approx 6,1\,\mathrm{MeV}$. Czas połowicznego zaniku kiuru wynosi $t_{1/2} = 163\,\mathrm{dni}$. Powłoka jest połączona z kulką biegnącym radialnie cienkim przewodem. Przyjmujemy, że obecność przewodu i płynący w nim prąd nie wpływją na pole elektryczne między powłokami. Cząstki alfa są całkowicie pochłaniane przez powłokę oraz kulkę, ale nie są pochłaniane ani rozpraszane przez kiur.

a) Jakie jest natężenie prądu płynącego w przewodzie, jeśli jego opór jest równy $R_1 = 100\,\mathrm{k\Omega}$?

b) Jaki powinien być opór R_2 przewodu, aby natężenie płynącego w nim prądu było równe połowie natężenia prądu określonego w pkt. a)?

Liczba Avogadro $N_\mathrm{A} \approx 6,0 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$, wartość ładunku elektronu $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$. Pomijamy emisję elektronów z kulki i otaczającej ją powłoki.

Rozważamy sytuację stacjonarną, tzn. po (przybliżonym) ustaleniu się natężenia prądu w przewodzie, przez czas mały w porównaniu z $t_{1/2}$.



rys. 1

Zadanie 2

Pręt o długości l i masie m położono na równi o kącie nachylenia α (patrz rys. 2), na wysokości h nad podłogą (przy czym $h \gg l$).

a) Opisz jakościowo ruch pręta.

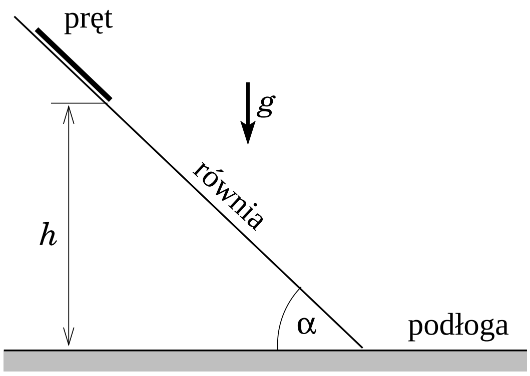
b) Wyznacz prędkość pręta w ostatniej fazie ruchu. Podaj wartość liczbową dla $h = 6,4\,\mathrm{m}$, $\alpha = 45^\circ$, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ (przyspieszenie ziemskie).

Tarcie i opór powietrza zaniedbujemy. Pręt jest idealnie sztywny i cały czas znajduje się w płaszczyźnie pionowej prostopadłej do powierzchni równi. Podłoga i równia idealnie amortyzują uderzenia, tzn. powodują że tuż po uderzeniu prostopadła do nich składowa prędkości uderzanego punktu jest równa 0, a ich ugięcie w trakcie uderzenia jest znikomo małe.

Moment bezwładności pręta względem środka masy jest równy $I = (1/12)ml^2$. W chwili początkowej pręt spoczywał. Kąt nachylenia spełnia warunek $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, przy czym α nie jest bliskie 90°.

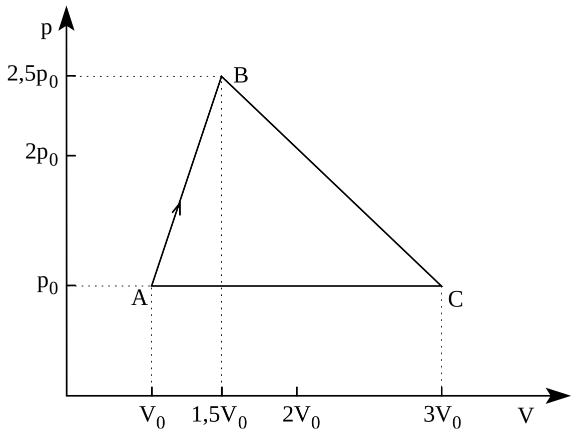
Zadanie 3

Pewien konstruktor zbudował skomplikowany silnik cieplny, którego czynnikiem roboczym jest n moli jednoatomowego gazu doskonałego (molowe ciepło właściwe równe $(3/2)R$) pracującego w cyklu tworzącym na wykresie $p - V$ trójkąt ABC o wierzchołkach w punktach (V_0, p_0), $((3/2)V_0, (5/2)p_0)$, $(3V_0, p_0)$ (patrz rys. 3). Gaz pobiera ciepło ze źródła ciepła o temperaturze



rys. 2

T_1 i oddaje je do chłodnicy o temperaturze T_2. Przyjmujemy, że gaz jest w każdym momencie cyklu w stanie równowagi termodynamicznej i pomijamy wszelkie opory mechanizmów.
a) Oblicz sprawność tego silnika.
b) Jakie warunki muszą spełniać temperatury T_1 i T_2 aby silnik pracował?



rys. 3

Rozwiązane zadania 2

Oznaczmy niższy (początkowo) koniec pręta literą A, a wyższy – literą B.
a) Ruch składa się z następujących etapów.
I. Zsuwanie się pręta wzdłuż równi aż do momentu uderzenia o podłogę. Z zasady zachowania energii wynika, że prędkość pręta tuż przed tym uderzeniem jest równa

$$v_1 = \sqrt{2gh}. \tag{1}$$

II. Uderzenie pręta. Na pręt w bardzo krótkim czasie działają bardzo duże siły pochodzące od podłogi i równi (siłę grawitacji można zaniedbać). Zgodnie z warunkami zadania na końcu tego etapu prędkość punktu A jest równoległa do podłogi, a prędkość punktu B jest równoległa do równi.
III. Ruch po uderzeniu pręta w podłogę, aż do ponownego uderzenia. Ponieważ $h \gg l$, zmiany prędkości w tym etapie spowodowane istnieniem grawitacji są małe, a zatem ruch można uważać za swobodny aż do chwili, gdy pojawi się znowu siła reakcji podłogi lub równi.
Ruch pręta na tym etapie jest złożeniem ruchu jednostajnego z pewną prędkością $\vec{v}_{śm}$ (prędkością środka masy) i oraz jednostajnego obrotu wokół środka masy. Prędkości końców pręta są dane równaniami (patrz rys. 2a))

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{śm} + \vec{v}_{obr}, \tag{2}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{śm} - \vec{v}_{obr}, \tag{3}$$

gdzie $\vec{v}_{obr}$ jest prędkością wynikającą z ruchu obrotowego względem środka masy, prostopadłą do pręta i stałą co do wartości. $\vec{v}_{obr}$ obraca się wraz z obrotem pręta w kierunku (zgodnie z rysunkiem) przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, natomiast $\vec{v}_{śm}$ pozostaje stałe (patrz rys. 2b)). Wynika z tego, że pionowa składowa prędkości (o znaku dodatnim w górę) punktu A rośnie co najmniej do momentu, gdy pręt obróci się o kąt 2α. A zatem aż do tego momentu punkt A na pewno nie uderzy w podłogę. Podobnie będzie rosła prostopadła do równi składowa prędkości (o znaku dodatnim w górę / w prawo) punktu B, a zatem punkt B co najmniej do momentu obrotu o kąt 2α nie uderzy w równię. Jednak ponieważ pionowa składowa $\vec{v}_{śm}$ jest skierowana w dół, po obrocie pręta o kąt 2α punkt B znalazłby się poniżej podłogi (patrz rys. 2c)). Oznacza to, że w pewnym momencie, przed obróceniem się pręta o kąt 2α, punkt B musi uderzyć w podłogę.
Podsumowując: w III etapie pręt oderwie się od równi i podłogi, a ten etap zakończy się uderzeniem końca B pręta w podłogę.
IV. Uderzenie punktu B w podłogę. Bardzo krótko działają bardzo duże pionowe siły reakcji podłogi. Pod koniec tego etapu pionowa składowa prędkości punktu B jest równa 0.
V. Ponieważ jakościowa analiza nie daje odpowiedzi na pytanie, jaka jest pod koniec etapu IV prędkość punktu A, szczegółowa analiza dalszych faz ruchu jest niemożliwa.
Rozważmy jeszcze raz ruch po zderzeniu (po fazie II) przy pominięciu istnienia podłogi i równi. Zauważmy, że z równań (2, 3) oraz warunków początkowych na początku fazy III wynika, że prostopadłe do równi składowe prędkości punktów A i B nigdy nie mogą być mniejsze od zera, a zatem gdyby nie było zderzenia punktu B z podłogą, to żaden koniec pręta nie mógłby się zderzyć z równią. Zderzenie z podłogą wyhamowuje ruch obrotowy pręta i jednocześnie zwiększa prostopadłą do równi składową prędkości środka masy pręta, zatem zderzenie końców pręta z równią po etapie II nie może nastąpić.
Zatem w następnych fazach ruchu końce pręta będą ulegać wyhamowującym ruch pionowy i obrotowy zderzeniom z podłogą, aż do momentu, gdy pręt będzie leżał na podłodze poruszając się wzdóż niej ze stałą prędkością. Ta prędkość będzie równa poziomej składowej prędkości środka masy pręta na zakończenie etapu II ponieważ po tym etapie działają tylko siły pionowe.
b) Z powyższej analizy wynika, że szukana prędkość to pozioma składowa prędkości środka masy pręta na zakończenie etapu II. Rozważmy zatem szczegółowo uderzenie pręta w podłogę.

Niech R_A oznacza siłę z jaką podłoga (w danej chwili zderzenia) działa na punkt A, a R_B – siłę z jaką równia działa na punkt B. Z II zasady dynamiki otrzymamy

$$a_\perp = \frac{R_A\cos\alpha + R_B}{m},\ a_\parallel = -\frac{R_A\sin\alpha}{m}, \tag{4}$$

gdzie $a_\parallel$ i $a_\perp$ oznacza odpowiednio równoległą i prostopadłą do pręta składową przyspieszenia środka masy pręta.
Z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego przyspieszenie kątowe pręta jest równe

$$\varepsilon = \frac{R_A\cos\alpha - R_B}{I}\frac{l}{2}. \tag{5}$$

Z powyższych równań wynika, że zmiana prędkości środka masy pręta jest równa

$$\Delta v_\perp = \frac{T_A\cos\alpha + T_B}{m},\ \Delta v_\parallel = -\frac{T_A\sin\alpha}{m}, \tag{6}$$

gdzie T_A oraz T_B są popędami sił R_A oraz R_B.
Analogicznie prędkość kątowa pręta tuż po zderzeniu wynosi

$$\omega = \frac{T_A\cos\alpha - T_B}{I}\frac{l}{2}. \tag{7}$$

Ponieważ po zderzeniu prędkość końca B pęta jest równoległa do równi, mamy

$$\Delta v_\perp - \omega\frac{l}{2} = 0. \tag{8}$$

Po zderzeniu prędkość końca A pęta jest równoległa do podłogi, tzn.

$$\Delta v_\perp + \omega\frac{l}{2} = \left(v_1 + \Delta v_\parallel\right)\operatorname{tg}\alpha. \tag{9}$$

Z równań (6), (7), (8), (9) możemy wyznaczyć niewiadome $\Delta v_\perp$, $\Delta v_\parallel$, ω, T_A, T_B. Styczna oraz prostopadła do pręta składowa prędkości środka masy oraz prędkość kątowa obrotu pręta będą równe

$$v_{śm\parallel} = v_1 + \Delta v_\parallel = \frac{1}{\frac{1}{4}\left(1+\frac{4I}{ml^2}\right)\operatorname{tg}^2\alpha + 1}v_1, \tag{10}$$

$$v_{śm\perp} = \Delta v_\perp = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\frac{1}{4}\left(1+\frac{4I}{ml^2}\right)\operatorname{tg}^2\alpha + 1}v_1, \tag{11}$$

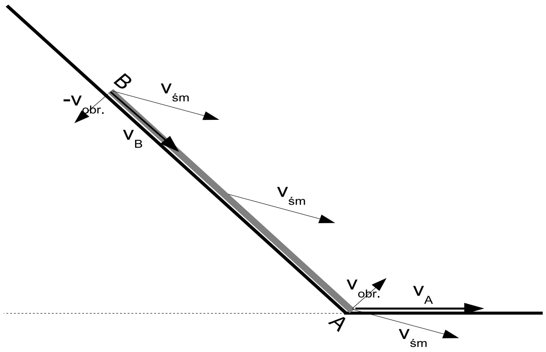
$$\omega = \frac{1}{l}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\frac{1}{4}\left(1+\frac{4I}{ml^2}\right)\operatorname{tg}^2\alpha + 1}v_1. \tag{12}$$

Zatem końcowa prędkość pręta, równa poziomej składowej prędkości jego środka masy po zakończeniu etapu II, wynosi

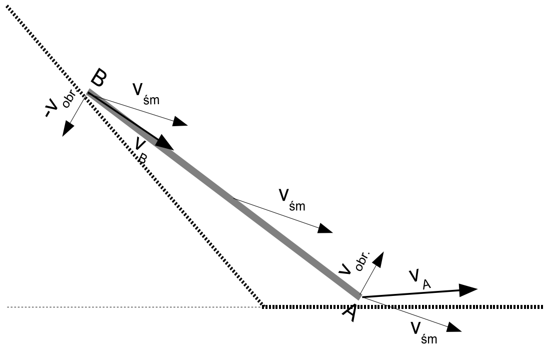
$$\begin{aligned} v_{\text{końcowe}} &= v_{śm\parallel}\cos\alpha + v_{śm\perp}\sin\alpha = \\ &= \frac{1+\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}\frac{1}{\frac{1}{4}\left(1+\frac{4I}{ml^2}\right)\operatorname{tg}^2\alpha + 1}v_1. \end{aligned} \tag{13}$$

Dla $\alpha = 45^{\mathrm{O}}$, $I = \frac{1}{12}ml^2$ otrzymamy:

$$v_{\text{końcowe}} = \frac{9\sqrt{2}}{16}v_1 = \frac{9}{8}\sqrt{gh} = 9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{14}$$



Rys. 2. a)



Rys. 2. b)

Punktacja:

a)

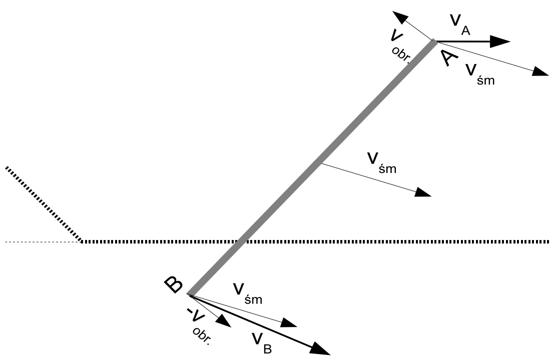
Zauważenie i uzasadnienie, że po pierwszym uderzeniu w podłogę pręt odrywa się od podłogi i od równi, a następnie uderza końcem B w podłogę oraz zauważenie, że pozostałe fazy ruchu nie zmieniają poziomej składowej prędkości – 3 pkt.

b)

Napisanie II zasady dynamiki dla ruchu środka masy oraz ruchu obrotowego w trakcie zderzenia (równ. (4) i (5) lub równoważne) – 1 pkt.

Wypisanie układu równań pozwalajacego na wyznaczenie prędkości środka masy i prędkości katowej po I zderzeniu (równania (6), (7), (8), (9) lub równoważne) – 3 pkt.

Wyznaczenie prędkości końcowej pręta (wzór (13) wraz z wyznaczeniem wartości liczbowej (wzór (14) – 3 pkt.



Rys. 2. c)