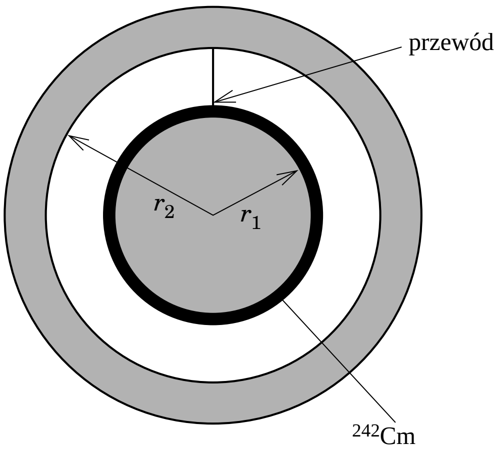
Zadanie 1

Metalowa kulka o promieniu $r_1 = 10\,\mathrm{cm}$ jest otoczona, współśrodkową z nią, metalową, sferyczną powłoką o promieniu wewnetrznym $r_2 = 2r_1$ (patrz rys. 1). Między powłoką a kulką panuje próżnia. Kulka jest pokryta cienką, równomierną warstwą izotopu kiuru $^{242}\mathrm{Cm}$ w ilości $n = 0,01\,\mathrm{mola}$. Jądro $^{242}\mathrm{Cm}$ rozpada się wysyłając cząstkę alfa o energii $E_0 \approx 6,1\,\mathrm{MeV}$. Czas połowicznego zaniku kiuru wynosi $t_{1/2} = 163\,\mathrm{dni}$. Powłoka jest połączona z kulką biegnącym radialnie cienkim przewodem. Przyjmujemy, że obecność przewodu i płynący w nim prąd nie wpływją na pole elektryczne między powłokami. Cząstki alfa są całkowicie pochłaniane przez powłokę oraz kulkę, ale nie są pochłaniane ani rozpraszane przez kiur.
a) Jakie jest natężenie prądu płynącego w przewodzie, jeśli jego opór jest równy $R_1 = 100\,\mathrm{k\Omega}$?
b) Jaki powinien być opór R_2 przewodu, aby natężenie płynącego w nim prądu było równe połowie natężenia prądu określonego w pkt. a)?
Liczba Avogadro $N_\mathrm{A} \approx 6,0 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$, wartość ładunku elektronu $e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$. Pomijamy emisję elektronów z kulki i otaczającej ją powłoki.
Rozważamy sytuację stacjonarną, tzn. po (przybliżonym) ustaleniu się natężenia prądu w przewodzie, przez czas mały w porównaniu z $t_{1/2}$.



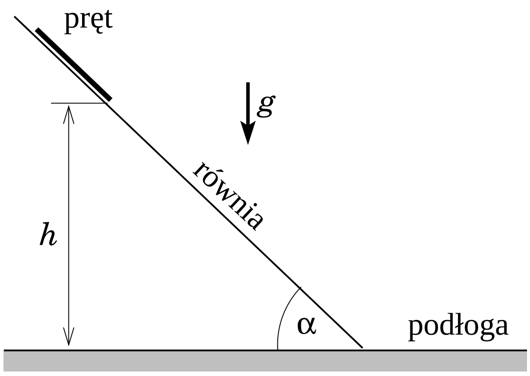
rys. 1

Zadanie 2

Pręt o długości l i masie m położono na równi o kącie nachylenia α (patrz rys. 2), na wysokości h nad podłogą (przy czym $h \gg l$).
a) Opisz jakościowo ruch pręta.
b) Wyznacz prędkość pręta w ostatniej fazie ruchu. Podaj wartość liczbową dla $h = 6,4\,\mathrm{m}$, $\alpha = 45^\circ$, $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ (przyspieszenie ziemskie).
Tarcie i opór powietrza zaniedbujemy. Pręt jest idealnie sztywny i cały czas znajduje się w płaszczyźnie pionowej prostopadłej do powierzchni równi. Podłoga i równia idealnie amortyzują uderzenia, tzn. powodują że tuż po uderzeniu prostopadła do nich składowa prędkości uderzanego punktu jest równa 0, a ich ugięcie w trakcie uderzenia jest znikomo małe.
Moment bezwładności pręta względem środka masy jest równy $I = (1/12)ml^2$. W chwili początkowej pręt spoczywał. Kąt nachylenia spełnia warunek $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, przy czym α nie jest bliskie 90°.

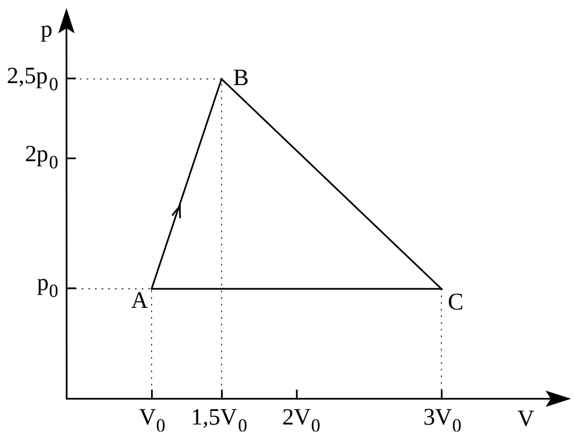
Zadanie 3

Pewien konstruktor zbudował skomplikowany silnik cieplny, którego czynnikiem roboczym jest n moli jednoatomowego gazu doskonałego (molowe ciepło właściwe równe $(3/2)R$) pracującego w cyklu tworzącym na wykresie $p-V$ trójkąt ABC o wierzchołkach w punktach (V_0, p_0), $((3/2)V_0, (5/2)p_0)$, $(3V_0, p_0)$ (patrz rys. 3). Gaz pobiera ciepło ze źródła ciepła o temperaturze



rys. 2

T_1 i oddaje je do chłodnicy o temperaturze T_2. Przyjmujemy, że gaz jest w każdym momencie cyklu w stanie równowagi termodynamicznej i pomijamy wszelkie opory mechanizmów.
a) Oblicz sprawność tego silnika.
b) Jakie warunki muszą spełniać temperatury T_1 i T_2 aby silnik pracował?



rys. 3

Rozwiązane zadania 3

Aby obliczyć sprawność tego cyklu, należy policzyć pracę wykonaną przez układ $\bar{W}_{\text{wyk}}$ oraz ciepło dostarczone do układu Q_{dost}.
Dla tłoka o powierzchni S i przesuwajacego się o odległość dL, praca wykonana przez gaz $\bar{W}_{el} = FdL = pSdL = pdV$, gdzie dV jest zmianą objętości gazy w tym procesie, a p — ciśnieniem gazu. Całkowita praca jest równa sumie wszystkich takich elementów, co oznacza że jest on polem powierzchni ograniczonej przez linie definiujące cykl na wykresie $p-V$. W naszym przypadku oznacza to, że

$$W_{\text{wyk}} = \frac{1}{2}2V_0 \cdot \frac{3}{2}p_0 = \frac{3}{2}V_0 \cdot p_0. \tag{1}$$

Z I zasady termodynamiki wynika, że ciepło Q_{el} dostarczone do układu (tutaj może być ujemne) w przemianie infinitezymalnej spełnia równanie $dU = Q_{el} - W_{el}$, gdzie dU jest zmianą energii wewnętrznej w tym procesie. Stąd $Q_{el} = dU + \bar{W}_{el}$. Wszystkie rozważane w cyklu procesy spełniają związek $p = \alpha V + \beta$, gdzie współczynniki α, β są różne w różnych etapach cyklu. Uwzględniając, że energia wewnętrzna gazu doskonałego o molowym cieple właściwym $c_V = \frac{3}{2}R$ jest równa $U = \frac{3}{2}nRT$ oraz równanie stanu gazu doskonałego (równanie Clapeyrona) $pV = nRT$ dostajemy

$$\begin{aligned} Q_{el} = dU + \bar{W}_{el} = d(\frac{3}{2}nRT) + pdV = \frac{3}{2}d(pV) + pdV = \frac{3}{2}d[(\alpha V + \beta)V] + (\alpha V + \beta)dV = \\ = (4\alpha V + \frac{5}{2}\beta)dV. \end{aligned} \tag{2}$$

Aby ciepło było rzeczywiście dostarczone, powyższa wielkość musi być dodatnia. Rozważymy ten problem po kolei na poszczególnych fragmentach cyklu.
Odcinek AB:
$\alpha = 3\frac{p_0}{V_0}$, $\beta = -2V_0$, $dV > 0$, a zatem $Q_{el} > 0$ na całym tym odcinku.
Całkowite ciepło $Q_{AB\text{dost}}$ dostarczone na tym odcinku możemy wyznaczyć z I zasady termodynamiki

$$\begin{aligned} Q_{AB\text{dost}} &= \Delta U + \bar{W}_{AB} = \frac{3}{2}\Delta(pV) + (\text{pole pod odcinkiem AB}) = \\ &= \frac{3}{2}(\frac{5}{2}p_0)(\frac{3}{2}V_0) - \frac{3}{2}p_0V_0 + \frac{1}{2}(\frac{5}{2}p_0 + p_0)\frac{1}{2}V_0 = 5p_0V_0. \end{aligned} \tag{3}$$

Odcinek BC:
$\alpha = -\frac{p_0}{V_0}$, $\beta = 4p_0$, $dV > 0$, a zatem $Q_{el} > 0$ gdy $4\alpha V + \frac{5}{2}\beta = -4\frac{p_0}{V_0}V + \frac{5}{2}4p_0 > 0$, czyli gdy $V < \frac{5}{2}V_0$. Oznaczając literą D punkt odpowiadający (na odcinku BC) objętości $\frac{5}{2}V_0$ (i ciśnieniu $\frac{3}{2}p_0$) dochodzimy do wniosku, że ciepło jest dostarczane tylko na odcinku BD. Zatem

$$\begin{aligned} Q_{BC\text{dost}} = Q_{BD\text{dost}} &= \Delta U + \bar{W}_{BD} = \frac{3}{2}\Delta(pV) + (\text{pole pod odcinkiem BD}) = \\ &= \frac{3}{2}(\frac{3}{2}p_0)(\frac{5}{2}V_0) - \frac{3}{2}(\frac{5}{2}p_0)(\frac{3}{2}V_0) + \frac{1}{2}(\frac{5}{2}p_0 + \frac{3}{2}p_0)V_0 = 2p_0V_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Odcinek CA:
$\alpha = 0$, $\beta = p_0$, $dV < 0$, a zatem $Q_{el} < 0$ na całym odcinku CA, czyli ciepło nie jest na tym odcinku dostarczane

$$Q_{CA\text{dost}} = 0.$$

Czyli całkowite ciepło dostarczone w czasie jednego cyklu jest równe

$$Q_{\text{dost}} = Q_{AB\text{dost}} + Q_{BC\text{dost}} + Q_{CA\text{dost}} = 7p_0V_0 \tag{5}$$

Zatem sprawność cyklu

$$\eta = \frac{\bar{W}_{\text{wyk}}}{Q_{\text{dost}}} = \frac{3}{14} \tag{6}$$

Temperatura źródła ciepła powinna być nie niższa niż temperatura gazu w dowolnym stanie w trakcie dostarczania ciepła, natomiast temperatura chłodnicy powinna być nie wyższa niż temperatura gazu w dowolnym stanie w trakcie oddawania ciepła. Zgodnie z poprzednimi rozważaniami

$$T = \frac{pV}{nR} = \frac{(\alpha V + \beta)V}{nR}$$

Temperatura maksymalna

Na odcinku AB:
$T = \frac{\left(3\frac{p_0}{V_o}V - 2V_0\right)V}{nR}$. Ponieważ jest to funkcja kwadratowa V o dodatnim współczynniku przy V^2, maksimum jest tu osiągane na jednym z końców przedziału. łatwo sprawdzić, że zachodzi to dla $V = \frac{3}{2}V_0$ i że $T_{\max \mathrm{AB}} = \frac{15}{4}\frac{p_0V_0}{nR}$.

Na odcinku BD:
$T = \frac{(-\frac{p_0}{V_o}V + 4p_0)V}{nR}$. Pierwszym kandydatem na maksimum jest maksimum tej funkcji kwadratowej występujące w punkcie $V = 2V_0$. Ponieważ ten punkt należy do rozważanego odcinka, otrzymujemy $T_{\max \mathrm{BD}} = \frac{(-\frac{p_0}{V_o}2V_0 + 4p_0)(2V_0)}{nR} = 4\frac{p_0V_0}{nR} > T_{\max \mathrm{AB}}$.

Temperatura minimalna.

Na odcinku DC:
$T = \frac{(-\frac{p_0}{V_o}V + 4p_0)V}{nR}$. Ta funkcja jest rosnąca od $-\infty$ do $2V_0$ i malejąca od $2V_0$ do ∞. Ponieważ odcinek DC leży w tym drugim przedziale, minimum jest osiągane na jego końcu i wynosi $T_{\min \mathrm{DC}} = \frac{p_0(3V_0)}{nR} = 3\frac{p_0V_0}{nR}$.

Na odcinku CA:
$T = \frac{p_0V}{nR}$, stąd $T_{\min \mathrm{CA}} = \frac{p_0V_0}{nR} < T_{\min \mathrm{DC}}$.

Odpowiedź:

Sprawność cyklu wynosi $\eta = \frac{3}{14}$.

Temperatura źródła ciepła musi spełniać warunek $T_1 \geqslant 4\frac{p_0V_0}{nR}$.

Temperatura chłodnicy musi spełniać warunek $T_2 \leqslant \frac{p_0V_0}{nR}$.

Punktacja

Wyznaczenie pracy wykonanej przez gaz w trakcie jednego cyklu (wzór (1)) – 1 pkt.

Wyznaczenie na jakim fragmencie cyklu ciepło jest pobierane przez gaz (na odcinkach AB, BD, gdzie $D = (\frac{5}{2}V_0, \frac{3}{2}p_0)$ – 2 pkt.

Wyznaczenie ciepła dostarczonego do gazu na odcinku AB (wzór (3)) – 1 pkt.

Wyznaczenie ciepła dostarczonego do gazu na odcinku BC (wzór (4)) – 2 pkt.

Wyznaczenie sprawności cyklu (wzór (6)) – 1 pkt.

Wyznaczenie minimalnej temperatury źródła ciepła $(4\frac{p_0V_0}{nR})$ – 2 pkt.

Wyznaczenie maksymalnej temperatury chłodnicy $(\frac{p_0V_0}{nR})$ – 1 pkt.