LVI OLIMPIADA FIZYCZNA

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Źródła:
– Komitet Główny Olimpiady Fizycznej;
– T.M. Molenda, IF US, www.OF.szc.pl.

Zadanie T3

W chwili $t = 0$ w metalowym naczyniu znajdowała się woda o masie $m_W = 0{,}25\,\mathrm{kg}$ i temperaturze $T_0 = 0°\mathrm{C}$. Stwierdzono doświadczalnie, że dla $t > 0$ zależność temperatury wody od czasu t jest w tym przypadku w bardzo dobrym przybliżeniu dana wzorem

$$T = e^{-\lambda t}(T_0 - T_{\mathrm{ot}}) + T_{\mathrm{ot}}, \tag{1}$$

gdzie $\lambda = 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$, a $T_{\mathrm{ot}} = 20°\mathrm{C}$.

Podaj zależność temperatury wody od czasu (wraz z liczbowymi wartościami parametrów) w przypadku, gdyby w chwili $t = 0$ w naczyniu znajdowała się mieszanina $m_W = 0{,}25\,\mathrm{kg}$ wody i $m_L = 0{,}25\,\mathrm{kg}$ lodu o temperaturze T_0.

Zakładamy, że w tej drugiej sytuacji warunki zewnętrzne są dokładnie takie same jak w pierwszej. Metal, z którego wykonano naczynie, bardzo dobrze przewodzi ciepło. Każdorazowo po napełnieniu naczynie jest zamykane (ale nie hermetycznie). Ciśnienie w jego wnętrzu jest równe ciśnieniu normalnemu. Wewnątrz naczynia jest obracające się mieszadełko, ale pracę wykonywaną przez nie możemy zaniedbać. Pojemność cieplna naczynia wraz z powietrzem zawartym w jego wnętrzu oraz mieszadełkiem i termometrem jest zaniedbywalnie mała.

Ciepło właściwe wody jest równe $c_W = 4{,}2\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, ciepło topnienia lodu $q = 334\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$, ciepło właściwe lodu $c_L = 2{,}1\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}}$.

Rozwiązanie zadania T3

Zauważmy, że ilość ciepła dopływającego do wody w jednostce czasu (czyli prędkość dopływu ciepła) jest równa

$$J = m_W c_W \frac{dT}{dt} = m_W c_W \lambda e^{-\lambda t}(T_{\mathrm{ot}} - T_0) = m_W c_W (T_{\mathrm{ot}} - T)\,\lambda. \tag{2}$$

W szczególności, gdy temperatura wody jest równa T_0, ta prędkość wynosi

$$J_0 = m_W c_W (T_{\mathrm{ot}} - T_0)\,\lambda. \tag{3}$$

Temperatura mieszaniny wody z lodem jest stała i równa T_0, zatem do chwili roztopienia się lodu ciepło będzie dopływało do lodu ze stałą prędkością J_0. Będzie to trwało czas

$$t_r = \frac{m_L q}{J_0}. \tag{4}$$

Od tego momentu sytuacja będzie analogiczna do sytuacji pierwotnej, ale całkowita masa wody będzie równa $m_W + m_L$. Zatem zależność temperatury wody od czasu będzie w tym przypadku spełniała równanie

$$(m_W + m_L)\, c_W \frac{dT}{dt} = m_W c_W (T_{\mathrm{ot}} - T)\, \lambda. \tag{5}$$

Biorąc pod uwagę analogię ze wzorem (1) i uwzględniając warunek początkowy $T(t_r) = T_0$, otrzymujemy

$$T(t) = e^{-\lambda_2 (t - t_r)} (T_0 - T_{\mathrm{ot}}) + T_{\mathrm{ot}}, \tag{6}$$

gdzie

$$\lambda_2 = \frac{m_W}{m_W + m_L}\, \lambda. \tag{7}$$

Zatem ostatecznie

$$T(t) = \begin{cases} T_0, & 0 \le t < t_r, \\ e^{-\lambda_2 (t - t_r)} (T_0 - T_{\mathrm{ot}}) + T_{\mathrm{ot}}, & t \ge t_r, \end{cases} \tag{8}$$

gdzie

$$\lambda_2 = \frac{m_W}{m_L + m_W}\, \lambda \approx 1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}, \tag{9}$$

$$t_r = \frac{m_L q}{m_W c_W (T_{\mathrm{ot}} - T_0)\, \lambda} \approx 2 \cdot 10^4\,\mathrm{s}. \tag{10}$$

Punktacja

Wzór na prędkość dopływu ciepła (wzór (1)) .... 2 pkt.
Wyznaczenie czasu roztapiania lodu (wzór (3)) .... 2 pkt.
Równanie określające zależność temperatury od czasu w drugim przypadku (wzór (4)) .... 3 pkt.
Ostateczna zależność temperatury od czasu w drugim przypadku (wzór (5)) .... 2 pkt.
Wyznaczenie liczbowych wartości stałych (wzory (6) i (7)) .... 1 pkt.