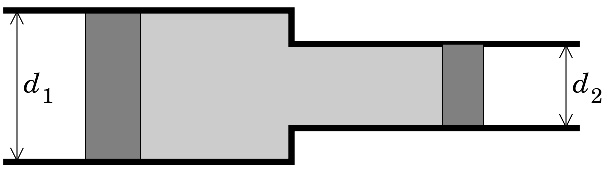
LVI OLIMPIADA FIZYCZNA – ZAWODY II STOPNIA

Zadanie 1

Pewien fotograf posiada aparat fotograficzny z obiektywem o ogniskowej f zmiennej w zakresie od $f_{\min}$ do $f_{\max}$. Średnica otworu przysłony obiektywu jest równa d.
Fotograf pragnie wykonać portret koleżanki w taki sposób, by jej twarz była "ostra" na zdjęciu i zajmowała połowę jego wysokości, a znajdujący się w odległości l za nią budynek był jak najbardziej rozmyty. Przy jakiej wartości ogniskowej fotograf powinien wykonać to zdjęcie? Rozważ następujące przypadki:
a) średnica otworu przysłony d nie zależy od f;
b) d zmienia się wraz ze zmianą f tak, że d/f jest stałe.
Uwaga: Rozmycie obrazu punktu B przy ostrości ustawionej na punkt A jest określone przez wielkość (średnicę) plamki, jaką na matrycy (lub kliszy) aparatu utworzy światło wychodzące z punktu B.
Przyjmij, że dla danego f obiektyw jest cienką, idealną (brak aberracji i dyfrakcji) soczewką o średnicy d oraz że odległość koleżanki od obiektywu jest znacznie większa od ogniskowej.

Zadanie 2

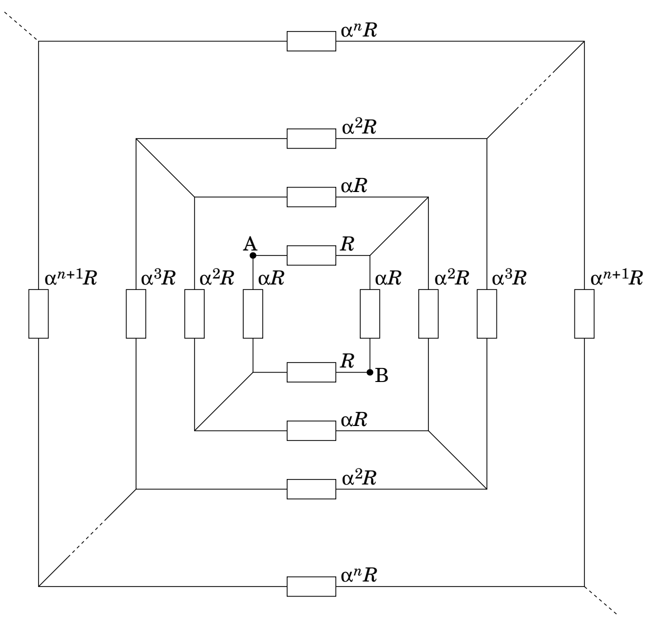
Rura o masie M składa się z odcinków o średnicach d_1 i d_2, w których mogą poruszać się bez tarcia dwa tłoki (patrz rys.). Prawy tłok ma masę m_2. Rura może swobodnie poruszać się w poziomie.



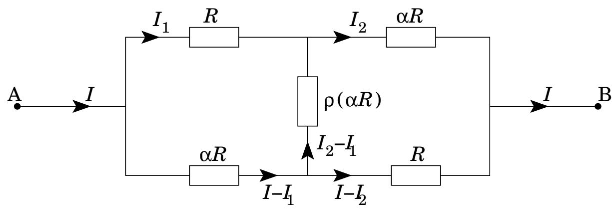
W chwili początkowej ciśnienie powietrza pomiędzy tłokami było równe ciśnieniu zewnętrznemu, rura i prawy tłok były nieruchome, a lewy tłok miał prędkość v_{1p} w prawo. Powietrze z obszaru pomiędzy tłokami nie wydostaje się na zewnątrz, a jego masa jest zaniedbywalna w porównaniu z masami tłoków i rury. Przemiana tego powietrza jest odwracalna i adiabatyczna. Przyjmij, że siła z jaką powietrze działa na element powierzchni tłoka lub rury nie zależy od prędkości tego elementu.
Stwierdzono, że lewy tłok zatrzymał się w chwili, gdy ciśnienie powietrza pomiędzy tłokami powróciło do wartości początkowej. Wyznacz masę m_1 lewego tłoka. Podaj wartość liczbową m_1 dla $m_2 = 1$kg, $M = 3$kg, $d_1 = 0,2$m, $d_2 = 0,1$m. Zakładamy, że wszystkie parametry są tak dobrane, że do momentu zatrzymania lewy tłok nie uderzy w zwężenie, a prawy nie wypadnie z rury.

Zadanie 3

Znajdź opór zastępczy między punktami A i B nieskończonej sieci oporów przedstawionej na rysunku ($\alpha > 0$). Dla jakiej wartości α ten opór zastępczy jest równy R ?



Rozwiązanie zadania 3
Oznaczmy opór zastępczy między punktami A i B przez $\rho(R)$. Ponieważ jedyną wielkością o wymiarze oporu jest R musi zachodzić proporcjonalność
$$\rho(R) = xR, \tag{1}$$
gdzie x jest funkcją wyłącznie α.
Zauważmy, że nasza sieć jest równoważna układowi na poniższym rysunku. Z wcześniejszej analizy wynika, że opór środko-



wego, zastępczego opornika jest równy
$$\rho(\alpha R) = \alpha\rho(R). \tag{2}$$
Stosując drugie prawo Kirchhoffa dla oczek układu zastępczego otrzymujemy
$$RI_1 - (I_2 - I_1)\rho(\alpha R) - (I - I_1)\alpha R = 0, \tag{3}$$
$$\alpha RI_2 - (I - I_2)R + (I_2 - I_1)\rho(\alpha R) = 0. \tag{4}$$
Jednocześnie spadek napięcia między punktami A i B wynosi
$$U_{AB} = I_1R + I_2\alpha R. \tag{5}$$
Z drugiej strony ten spadek napięcia jest określony przez opór zastępczy $\rho(R)$ między punktami A i B i prąd I
$$U_{AB} = I\rho(R). \tag{6}$$
Równania (3), (4), (5) i (6) stanowią po uwzględnieniu (2) układ równań pozwalający na wyznaczenie szukanego oporu zastępczego.
Z równań (3) i (4), uwzględniając (2) i (1), dostajemy
$$I_1 = \frac{\alpha\,(x+1)}{\alpha + 2x\alpha + 1}I, \tag{7}$$
$$I_2 = \frac{(x\alpha + 1)}{\alpha + 2x\alpha + 1}I. \tag{8}$$
Z powyższego wynika że
$$I_1 + I_2 = I, \tag{9}$$
co można zauważyć od razu uwzględniając symetrię naszego układu zastępczego. Wstawiając wzory (7) i (8) do równania (5), po uwzględnieniu równania (6) dostaniemy równanie na współczynnik x
$$2\alpha x^2 + \left(1 - \alpha^2\right)x - 2\alpha = 0. \tag{10}$$
Otrzymujemy dwa rozwiązania
$$x_{1,2} = \frac{\alpha^2 - 1 \pm \sqrt{\left(\alpha^2 - 1\right)^2 + 16\alpha^2}}{4\alpha}. \tag{11}$$
Zauważmy, że drugie rozwiązanie jest niefizyczne, gdyż jest ujemne dla dowolnych $\alpha > 0$. Ostatecznie otrzymujemy, że szukany opór zastępczy jest równy
$$\rho(R) = \frac{\alpha^2 - 1 + \sqrt{\left(\alpha^2 - 1\right)^2 + 16\alpha^2}}{4\alpha}R. \tag{12}$$
Opór zastępczy jest równy R (czyli $x = 1$) jedynie dla $\alpha = 1$ (uwzględniając, że $\alpha > 0$) co widać natychmiast ze wzoru (10). Ze schematu naszego układu zastępczego widać, że wtedy, ze względu na symetrię, przez opór $\rho(\alpha R)$ prąd nie płynie i opór zastępczy można określić uwzględniając tylko oporniki połączone bezpośrednio z punktami A lub B.