LVI Olimpiada Fizyczna – zawody III stopnia

Zadanie 1

Piłka uderza w poziomą podłogę pod kątem α z prędkością v_0. Współczynnik tarcia piłki o podłogę jest równy μ. W jakiej odległości od miejsca pierwszego uderzenia piłka ponownie uderzy w podłogę?

Podaj wartości liczbowe dla $\alpha = 45°$, $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ w dwóch przypadkach: $\mu = 0,1$ i $\mu = 0,8$.

Piłka nie obraca się przed zderzeniem. Czas zderzenia jest bardzo krótki, a w trakcie zderzenia ugięcie piłki jest zaniedbywalnie małe w porównaniu z jej promieniem. Piłka jest idealnie sprężysta, tzn. w przypadku, gdy nie obracając się uderza pionowo w podłogę, zderzenie jest idealnie sprężyste. Grubość powłoki piłki jest bardzo mała w porównaniu z promieniem. Powłoka nie ulega odkształceniu stycznemu. Masa powietrza w piłce jest zaniedbywalnie mała w porównaniu z masą jej powłoki. Pomiń opory aerodynamiczne.

Przyspieszenie ziemskie $g \approx 9,8\,\mathrm{m/s^2}$, a moment bezwładności sfery o promieniu R i masie m względem osi przechodzącej przez jej środek $I = (2/3)mR^2$.

Zadanie 2

Kuliste naczynie składa się ze współśrodkowych, cienkich, metalowych sfer o promieniach r_2 i r_1 (gdzie $r_2 > r_1$) między którymi jest próżnia (patrz rys.). Zewnętrzna sfera jest podzielona płaszczyzną na dwie części, z których mniejsza ma powierzchnię S_3. W wewnętrznej sferze umieszczono mieszaninę wody o masie m_W i lodu o masie m_L. Większa część zewnętrznej powłoki naczynia ma stałą temperaturę t_2, a mniejsza – stałą temperaturę t_3 (t_2 i t_3 są temperaturami w skali Celsjusza).

Po jakim czasie lód ulegnie całkowitemu roztopieniu?

Podaj wynik liczbowy dla $r_1 = 0,04\,\mathrm{m}$, $r_2 = 0,08\,\mathrm{m}$, $S_3 = 0,03\,\mathrm{m^2}$, $m_W = 0,1\,\mathrm{kg}$, $m_L = 0,1\,\mathrm{kg}$, $t_2 = 20\,°\mathrm{C}$, $t_3 = 10\,°\mathrm{C}$.

Powierzchnie sfer są doskonale czarne. Pojemność cieplną naczynia można zaniedbać. Przyjmij, że lód jest stale w stanie równowagi termodynamicznej z wodą. Ciśnienie wewnątrz wewnętrznej sfery jest stale równe ciśnieniu normalnemu.

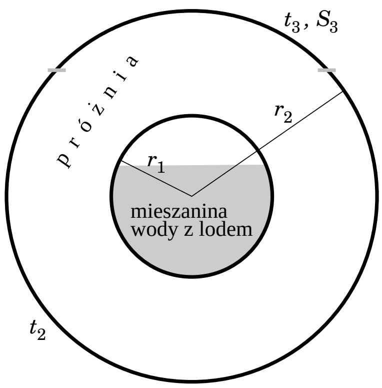
Ciepło topnienia lodu wynosi $q = 334\,\mathrm{kJ/kg}$, stała Stefana-Boltzmanna $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$, ciepło właściwe wody $c_W = 4,2\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, ciepło właściwe lodu $c_L = 2,1\,\mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, temperatura topnienia lodu w warunkach normalnych $T_0 = 273,15\,\mathrm{K}$.

Zadanie 3

Cienki, jednorodny pierścień o masie m i promieniu r spoczywa na poziomym blacie stołu. Pierścień jest zrobiony z jednego zwoju drutu, którego opór na jednostkę długości wynosi λ. Pod blatem znajduje się współosiowy z pierścieniem solenoid.

Zależność od czasu t natężenia prądu płynącego w solenoidzie jest dana wzorem

$$I_s = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 0, \\ I_0 \frac{t}{T} & \text{dla} \quad 0 \le t < T, \\ I_0 & \text{dla} \quad t \ge T, \end{cases} .$$



(gwarantuje to odpowiedni układ elektroniczny, do którego solenoid jest podłaczony).

a) Znajdź największą wartość I_0 ($= I_{0m}$), dla której pierścień jeszcze nie podskoczy ponad blat.

b) Zakładając, że $I_0 \gg I_{0m}$ (patrz punkt a)), wyznacz wysokość, na jaką podskoczy pierścień.

W rozwiązaniu uwzględnij następujące informacje:

(i) gdy pierścień jest umieszczony (współosiowo z solenoidem) na niewielkiej wysokości z nad blatem, a prąd płynący w solenoidzie ma natężenie I_s, to z bardzo dobrym przybliżeniem strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez pierścień jest dany wzorem $\Phi = (a - bz)\, I_s$, gdzie a, b są dodatnimi stałymi;

(ii) w każdym punkcie pole magnetyczne pochodzące od pierścienia można pominąć w porównaniu z polem pochodzącym od solenoidu;

(iii) można pominąć wpływ ruchu pierścienia na natężenie płynącego w nim prądu;

(iv) parametr T jest na tyle mały, że droga przebyta przez pierścień do chwili $t = T$ jest pomijalnie mała;

(v) blat jest niemagnetyczny i nieprzewodzący, a solenoid jest nieruchomy;

(vi) efekty związane z promieniowaniem oraz opór aerodynamiczny powietrza można pominąć.

Podaj wartości liczbowe szukanych wielkości dla $m = 2{,}3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$, $r = 2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$, $\lambda = 0{,}9 \cdot 10^{-2}\,\Omega/\mathrm{m}$, $a = 10^{-3}\,\mathrm{T \cdot m^2 \cdot A^{-1}}$, $b = 10^{-2}\,\mathrm{T \cdot m/A}$, $T = 10^{-3}\,\mathrm{s}$, $I_0 = 10\,\mathrm{A}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ (przyspieszenie ziemskie).

Rozwiązanie zadania 1

W poniższym rozwiązaniu wskaźnik x oznacza składową poziomą, y — składową pionową (dodatnia w górę), wskaźniki p i k oznaczają odpowiednio sytuację tuż przed i tuż po zderzeniu, v jest prędkością środka masy piłki, p – jej pędem, a ω – jej prędkością kątową.

Niech $N(t)$ będzie pionową składową siły, z jaką podłoga działa na piłkę w trakcie zderzenia. Ponieważ współczynnik tarcia jest równy μ, siła tarcia będzie w tym samym momencie równa $\mu N(t)$. Siła tarcia zmniejsza poziomą składową pędu piłki

$$\frac{dp_x}{dt} = -\mu N(t), \tag{1}$$

oraz wprawia piłkę w ruch obrotowy

$$I\frac{d\omega}{dt} = \mu N(t)R. \tag{2}$$

Ponieważ mamy równocześnie

$$\frac{dp_y}{dt} = N(t), \tag{3}$$

dostajemy stąd

$$\frac{dp_x}{dt} = -\mu\frac{dp_y}{dt}, \tag{4}$$

oraz

$$I\frac{d\omega}{dt} = \mu R\frac{dp_y}{dt} \tag{5}$$

Przy założeniu, że cały czas podczas zderzenia występuje poślizg, otrzymamy:

$$v_{xk} = v_{xp} + 2\mu v_{yp}, \tag{6}$$

$$\omega_k = -\frac{\mu Rm}{I}2v_{yp}. \tag{7}$$

Jednak jeśli tak obliczone ω_k jest większe od v_{xk}/R, co się sprowadza do warunku

$$2\mu\left(\frac{R^2m}{I}+1\right)|v_{yp}| > v_{xp}, \tag{8}$$

to powyższe założenie nie jest spełnione: v_x będzie malało, a ω rosło tylko do momentu, gdy $v_x = \omega R$. Ponieważ z równań (4) i (5) wynika

$$R\frac{dp_x}{dt} + I\frac{d\omega}{dt} = 0,$$

wnioskujemy, że

$$mR\left(v_{xp} - v_{xk}\right) = I\omega_k.$$

Ponieważ równocześnie w tym przypadku $v_{xk} = \omega_k R$, otrzymujemy

$$mR\left(v_{xp} - v_{xk}\right) = I\frac{v_{xk}}{R},$$

czyli (ten wzór można wyprowadzić bezpośrednio z zasady zachowania momentu pędu)

$$v_{xk} = \frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}}v_{xp}. \tag{9}$$

Czas, po jakim piłka znowu uderzy w podłogę jest równy $-\frac{2v_{yp}}{g}$, zatem odległość, w jakiej to nastąpi, jest równa

$$d = -\frac{2v_{yp}}{g} v_{xk}. \tag{10}$$

Podsumowując

$$d = \begin{cases} \frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}} \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} & \text{gdy} \quad \mathrm{ctg}\alpha < 2\mu\left(\frac{R^2 m}{I} + 1\right), \\ \frac{2v_0^2}{g}(\cos\alpha - 2\mu\sin\alpha)\sin\alpha & \text{gdy} \quad \mathrm{ctg}\alpha \geq 2\mu\left(\frac{R^2 m}{I} + 1\right). \end{cases} \tag{11}$$

Podstawiając wartości liczbowe dostaniemy:

$$\text{dla } \mu = 0,1 : d \approx 8,2 \text{ m}, \tag{12}$$

$$\text{dla } \mu = 0,8 : d \approx 6,1 \text{ m}. \tag{13}$$

W pierwszym z powyższych przypadków obowiązuje drugi z wzorów (11), w drugim – pierwszy.

Odległość $d \approx 6,1$ m otrzymamy dla wszystkich $\mu \geq 0,2$ (przy nie zmienionych pozostałych parametrach).

Komentarz do zadania 1

Ponad jedna czwarta finalistów otrzymała za to zadanie maksymalną liczbę punktów – nie sprawiło ono większych kłopotów osobom, które wiedziały, jak należy rozwiązywać zagadnienia tego typu.