LVI Olimpiada Fizyczna – zawody III stopnia

Zadanie 1

Piłka uderza w poziomą podłogę pod kątem α z prędkością v_0. Współczynnik tarcia piłki o podłogę jest równy μ. W jakiej odległości od miejsca pierwszego uderzenia piłka ponownie uderzy w podłogę?

Podaj wartości liczbowe dla $\alpha = 45°$, $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ w dwóch przypadkach: $\mu = 0,1$ i $\mu = 0,8$.

Piłka nie obraca się przed zderzeniem. Czas zderzenia jest bardzo krótki, a w trakcie zderzenia ugięcie piłki jest zaniedbywalnie małe w porównaniu z jej promieniem. Piłka jest idealnie sprężysta, tzn. w przypadku, gdy nie obracając się uderza pionowo w podłogę, zderzenie jest idealnie sprężyste. Grubość powłoki piłki jest bardzo mała w porównaniu z promieniem. Powłoka nie ulega odkształceniu stycznemu. Masa powietrza w piłce jest zaniedbywalnie mała w porównaniu z masą jej powłoki. Pomiń opory aerodynamiczne.

Przyspieszenie ziemskie $g \approx 9,8\,\mathrm{m/s^2}$, a moment bezwładności sfery o promieniu R i masie m względem osi przechodzącej przez jej środek $I = (2/3)mR^2$.

Zadanie 2

Kuliste naczynie składa się ze współśrodkowych, cienkich, metalowych sfer o promieniach r_2 i r_1 (gdzie $r_2 > r_1$) między którymi jest próżnia (patrz rys.). Zewnętrzna sfera jest podzielona płaszczyzną na dwie części, z których mniejsza ma powierzchnię S_3. W wewnętrznej sferze umieszczono mieszaninę wody o masie m_W i lodu o masie m_L. Większa część zewnętrznej powłoki naczynia ma stałą temperaturę t_2, a mniejsza – stałą temperaturę t_3 (t_2 i t_3 są temperaturami w skali Celsjusza).

Po jakim czasie lód ulegnie całkowitemu roztopieniu?

Podaj wynik liczbowy dla $r_1 = 0,04\,\mathrm{m}$, $r_2 = 0,08\,\mathrm{m}$, $S_3 = 0,03\,\mathrm{m^2}$, $m_W = 0,1\,\mathrm{kg}$, $m_L = 0,1\,\mathrm{kg}$, $t_2 = 20\,°\mathrm{C}$, $t_3 = 10\,°\mathrm{C}$.

Powierzchnie sfer są doskonale czarne. Pojemność cieplną naczynia można zaniedbać. Przyjmij, że lód jest stale w stanie równowagi termodynamicznej z wodą. Ciśnienie wewnątrz wewnętrznej sfery jest stale równe ciśnieniu normalnemu.

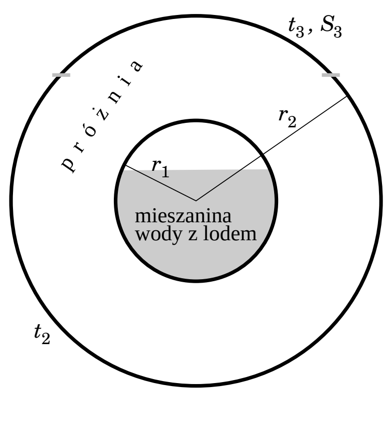
Ciepło topnienia lodu wynosi $q = 334\,\mathrm{kJ/kg}$, stała Stefana-Boltzmanna $\sigma = 5,7\cdot 10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$, ciepło właściwe wody $c_W = 4,2\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$, ciepło właściwe lodu $c_L = 2,1\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$, temperatura topnienia lodu w warunkach normalnych $T_0 = 273,15\,\mathrm{K}$.

Zadanie 3

Cienki, jednorodny pierścień o masie m i promieniu r spoczywa na poziomym blacie stołu. Pierścień jest zrobiony z jednego zwoju drutu, którego opór na jednostkę długości wynosi λ. Pod blatem znajduje się współosiowy z pierścieniem solenoid.

Zależność od czasu t natężenia prądu płynącego w solenoidzie jest dana wzorem

$$I_s = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 0, \\ I_0 \frac{t}{T} & \text{dla} \quad 0 \le t < T, \\ I_0 & \text{dla} \quad t \ge T, \end{cases} .$$



(gwarantuje to odpowiedni układ elektroniczny, do którego solenoid jest podłaczony).

a) Znajdź największą wartość I_0 ($= I_{0m}$), dla której pierścień jeszcze nie podskoczy ponad blat.

b) Zakładając, że $I_0 \gg I_{0m}$ (patrz punkt a)), wyznacz wysokość, na jaką podskoczy pierścień.

W rozwiązaniu uwzględnij następujące informacje:

(i) gdy pierścień jest umieszczony (współosiowo z solenoidem) na niewielkiej wysokości z nad blatem, a prąd płynący w solenoidzie ma natężenie I_s, to z bardzo dobrym przybliżeniem strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez pierścień jest dany wzorem $\Phi = (a - bz)\, I_s$, gdzie a, b są dodatnimi stałymi;

(ii) w każdym punkcie pole magnetyczne pochodzące od pierścienia można pominąć w porównaniu z polem pochodzącym od solenoidu;

(iii) można pominąć wpływ ruchu pierścienia na natężenie płynącego w nim prądu;

(iv) parametr T jest na tyle mały, że droga przebyta przez pierścień do chwili $t = T$ jest pomijalnie mała;

(v) blat jest niemagnetyczny i nieprzewodzący, a solenoid jest nieruchomy;

(vi) efekty związane z promieniowaniem oraz opór aerodynamiczny powietrza można pominąć.

Podaj wartości liczbowe szukanych wielkości dla $m = 2{,}3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$, $r = 2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$, $\lambda = 0{,}9 \cdot 10^{-2}\,\Omega/\mathrm{m}$, $a = 10^{-3}\,\mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{A}^{-1}$, $b = 10^{-2}\,\mathrm{T} \cdot \mathrm{m}/\mathrm{A}$, $T = 10^{-3}\,\mathrm{s}$, $I_0 = 10\,\mathrm{A}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$ (przyspieszenie ziemskie).

Rozwiązanie zadania 3

Zgodnie z prawem Faradaya, pole magnetyczne pochodzące od solenoidu, indukuje w rozważanym przewodniku siłę elektromotoryczną

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -(a - bz)\frac{dI_s}{dt} + bI_s\frac{dz}{dt} \approx (a - bz)\frac{dI_s}{dt}. \tag{1}$$

W powyższym zgodnie z warunkiem (ii) pominęliśmy pole magnetyczne pochodzące od prądu płynącego w pierścieniu, a ostatnie przybliżenie jest konsekwencją warunku (iii). Prąd płynący w pierścieniu będzie równy

$$I_p = \frac{\mathcal{E}}{R} = (a - bz)\frac{1}{R}\frac{dI_s}{dt}, \tag{2}$$

gdzie $R = 2\pi r\lambda$ jest oporem pierścienia.

Rozważmy walec, którego "wieczko" jest określone przez pierścień znajdujący się na wysokości z_1, a "denko" przez pierścień znajdujący się na wysokości z_2. Całkowity strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez powierzchnię tego walca jest równy 0 ("magnetyczne prawo Gaussa"). Ponieważ strumień przez "wieczko" jest równy $(a - bz_1)\, I_s$, a przez denko – $(a - bz_2)\, I_s$, to strumień indukcji magnetycznej o wartości $b(z_1 - z_2)I_s$ "wycieka" przez boczną powierzchnię walca. Pole bocznej powierzchni tego walca jest równe $2\pi r(z_1 - z_2)$, zatem średnia wartość prostopadłej do powierzchni bocznej składowej indukcji pola magnetycznego jest równa

$$B_{\perp śr} = \frac{b(z_1 - z_2)I_s}{2\pi r(z_1 - z_2)} = \frac{b}{2\pi r}I_s.$$

Ponieważ mamy symetrię obrotową, a wysokość naszego walca może być dowolnie mała (tzn. możemy rozważyć $z_2 \to z_1$), tuż przy pierścieniu prostopadła do osi solenoidu składowa indukcji magnetycznej pochodzącej od solenoidu jest równa

$$B_\perp = \frac{b}{2\pi r}I_s. \tag{3}$$

(Przy ogólniejszej zależności Φ od z otrzymalibyśmy $B_\perp(z) = -\frac{d\Phi(z)}{2\pi r dz}$.) Gdy przez pierścień płynie prąd I_p, siła elektrodynamiczna pochodząca od tego pola ma wartość

$$\begin{aligned} F = |2\pi r I_p B_\perp| &= |I_p b \cdot I_s| = \\ = |\,(a - bz)\frac{b}{R}\frac{dI_s}{dt}I_s| &= \frac{1}{2}(a - bz)\frac{b}{R}\frac{dI_s^2}{dt}. \end{aligned} \tag{4}$$

Jest ona skierowana do góry.

Uwzględniając podaną zależność I_s od czasu, dla $0 \le t \le T$ otrzymamy

$$F = (a - bz)\frac{b}{R}\frac{t}{T^2}I_0^2. \tag{5}$$

Gdy przewodnik leży na blacie, to $z = 0$ a maksymalna siła jest w chwili $t = T$. Aby przewodnik nie podskoczył, ta siła nie może być większa od mg; zatem szukane I_{0m} jest dane wzorem

$$I_{0m} = \sqrt{\frac{mgTR}{ab}} = \sqrt{\frac{2\pi r\lambda mgT}{ab}} \tag{6}$$

Przy założeniu, że $z \approx 0$, zmiana pędu przewodnika od chwili $t = 0$ do chwili $t = T$ wynosi

$$\Delta p = \frac{ab}{2R} \left(I_0^2 - I_{0m}^2 \right) - mg \left(T - T_m \right), \tag{7}$$

gdzie T_m jest chwilą, w której natężenie prądu osiągnie wartość I_m. Warunek $I_0 \gg I_m$ oznacza, że przez znaczną większość czasu T siła pochodząca od solenoidu jest znacznie większa niż mg, czyli możemy przyjąć

$$\Delta p = \frac{ab}{2R} I_0^2. \tag{8}$$

Zgodnie z warunkiem (iii) można pominąć prąd indukowany w pierścieniu, wywołany jego ruchem. Oznacza to, że dla $t > T$ można pominąć działającą na pierścień siłę elektrodynamiczną. Zatem przewodnik podskoczy na wysokość

$$h = \frac{1}{2g} \left(\frac{\Delta p}{m} \right)^2 = \frac{a^2 b^2 I_0^4}{8 g m^2 R^2}. \tag{9}$$

Uwzględniając $R = 2\pi r \lambda$ otrzymamy ostatecznie

$$h = \frac{a^2 b^2 I_0^4}{32 \pi^2 m^2 \lambda^2 r^2 g}. \tag{10}$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy

$$I_{0\,\min} \approx 0,05\mathrm{A}, \tag{11}$$
$$h \approx 1880\mathrm{m}. \tag{12}$$

Oczywiście ze względu na opory powietrza i inne zastosowane przybliżenia, faktycznie osiągnięta wysokość byłaby dużo mniejsza. Również wartości parametrów zostały (w wyniku pomyłki) źle dobrane – występujące tu natężenie pola magnetycznego jest zbyt duże, co prowadzi do częściowej sprzeczności z podanymi przybliżeniami.

Komentarz do zadania 3

Niewiele osób wiedziało, że do wyznaczenia siły podrzucającej pierścień należy wyznaczyć poziomą składową pola magnetycznego, a tylko kilka potrafiło wyznaczyć tę składową. Zwycięzca rozwiązał zadanie bezbłędnie, łącznie z krytyczną analizą podanych w treści wartości parametrów. To rozwiązanie zostało wyróżnione.