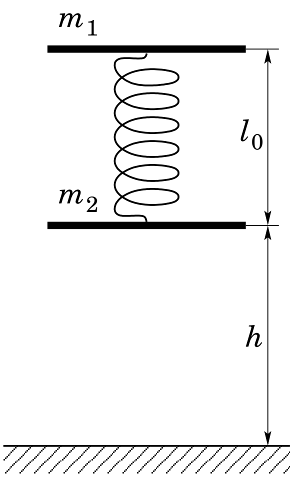
(Za każde zadanie można otrzymać 20pkt.)

Zadanie 1

Dwie cienkie, sztywne płyty o masach m_1 i m_2 są połączone nieważką sprężyną o stałej sprężystości k i długości swobodnej l_0. W chwili początkowej (patrz rysunek) płyty spoczywają poziomo, jedna nad drugą, ponad poziomą podłogą (dolna płyta na wysokości h), a sprężyna jest nienapięta. Następnie płyty spadają swobodnie na podłogę. Zderzenie dolnej płyty z podłogą jest całkowicie niespężyste, ale nie przykleja się ona do podłogi.



1. Jaka jest minimalna wysokość h_0, taka, że dla $h > h_0$ dolna płyta podskoczy nad podłogę?
2. Dla danego $h > h_0$ wyznacz, na jaką maksymalną wysokość uniesie się po zderzeniu środek masy układu tych dwóch płyt.
3. Jaka powinna być wysokość h, aby odległość oraz prędkość względna płyt w chwili, gdy po odbiciu środek masy obu płyt będzie znajdował się na maksymalnej wysokości (patrz pkt. 2.) oraz w chwili oderwania się dolnej płyty od podłogi, były takie same? Podaj wartość najmniejszej wysokości h spełniającej ten warunek w przypadku $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$, $k = 100\,\mathrm{N/m}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, $l_0 = 1\,\mathrm{m}$.

Sprężyna jest umocowana centralnie – w wyniku zderzenia płyty nie przesuwają się w poziomie, ani się nie obracają. Parametry są takie, że płyty nie zderzają się ze sobą. Po oderwaniu się od podłogi, dolna płyta nie zderza się z nią przed osiągnięciem przez środek masy płyt maksymalnej wysokości.

Zadanie 2

W chwili początkowej w cylindrze zamkniętym ruchomym tłokiem znajduje się nasycona para wodna o objętości $V_0 = 100\,\mathrm{dm^3}$ i temperaturze $t_0 = 100\,^\circ\mathrm{C}$. Rozważ następujące przypadki bardzo wolnej przemiany, której poddawana jest ta para:

1. Sprężanie izotermiczne od objętości V_0 i temperatury t_0, aż do osiągnięcia przez parę objętości $V_1 = 50\,\mathrm{dm^3}$
2. Rozprężanie izotermiczne od objętości V_0 i temperatury t_0, aż do osiągnięcia przez parę objętości $V_2 = 200\,\mathrm{dm^3}$
3. Sprężanie adiabatyczne od objętości V_0 i temperatury t_0, aż do osiągnięcia przez parę temperatury $t_3 = 105^\circ\mathrm{C}$
4. Rozprężanie adiabatyczne od objętości V_0 i temperatury t_0, aż do osiągnięcia przez parę temperatury $t_4 = 95^\circ\mathrm{C}$

Dla każdego z czterech przypadków opisz jakościowo zachowanie się pary podczas przemiany i podaj końcowe ciśnienie pary ($p_1 = ?, p_2 = ?, p_3 = ?, p_4 = ?$). Poza parą w cylindrze nie znajdują się żadne inne gazy. Molowe ciepło właściwe przy stałej objętości pary wodnej wynosi $C_V = 3R$, gdzie $R = 8{,}31\,\mathrm{J/(mol \cdot K)}$ jest uniwersalną stałą gazową. Tabela 1 przedstawia zależność ciśnienia nasyconej pary wodnej od temperatury.

Przyjmij, że jeśli para nie ulega skropleniu, to stosuje się ściśle do równania stanu gazu doskonałego.

Wskazówka

W trakcie przemiany adiabatycznej gazu doskonałego spełnione jest równanie

$$pV^\kappa = \mathrm{const},$$

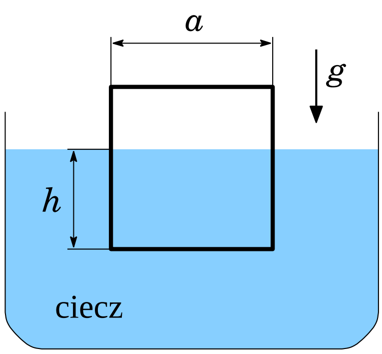
gdzie $\kappa = (C_V + R)/C_V$.

Tabela 1

t[°C]	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
p[hPa]	845	877	909	943	978	1013	1050	1088	1127	1167	1208

Zadanie 3

Długi solenoid o przekroju kwadratowym o boku a jest zanurzony na głębokość h w magnetycznej, nieprzewodzącej cieczy (patrz rysunek) o względnej przenikalności magnetycznej μ_r i gęstości ρ. Oś solenoidu jest równoległa do powierzchni cieczy.



Przekrój poprzeczny zanurzonego solenoidu

O ile poziom cieczy wewnątrz solenoidu będzie wyższy (lub niższy) od poziomu cieczy na zewnątrz, jeśli solenoid będzie podłączony do źródła prądu o ustalonym natężeniu I? Podaj wartość liczbową dla $I = 1\,\mathrm{A}$, liczby zwojów na jednostkę długości $n = 3000/\mathrm{m}$, $\mu_r = 10$, $\rho = 2 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, $a = 0{,}03\,\mathrm{m}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T{\cdot}m/A}$ (przenikalność magnetyczna próżni), $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ (przyspieszenie ziemskie).

Ciecz może swobodnie wpływać i wypływać przez końce solenoidu i między zwojami. Przyjmij, że powierzchnia cieczy wewnątrz solenoidu (a również na zewnątrz) jest pozioma oraz, że względna przenikalność magnetyczna powietrza jest równa 1. Można pominąć niejednorodności pola magnetycznego w pobliżu przewodu, z którego jest zrobiony solenoid. Grubość tego przewodu jest znacznie mniejsza od a.

Wskazówki

1. Linie pola magnetycznego biegną równolegle do osi solenoidu. W części solenoidu wypełnionej cieczą indukcja pola magnetycznego B jest taka, jakby całe wnętrze solenoidu było wypełnione cieczą. W części solenoidu wypełnionej powietrzem indukcja pola magnetycznego B jest taka, jakby całe wnętrze solenoidu było wypełnione powietrzem.
2. Objętościowa gęstość energii pola magnetycznego jest dana wzorem

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}$$

gdzie μ_r jest względną przenikalnością magnetyczną ośrodka.

3. Opór elektryczny przewodu, z którego zrobiony jest solenoid, nie ma wpływu na poziom cieczy wewnątrz solenoidu.

Rozwiązanie zadania 1

1. Dolna płyta podskoczy, jeśli działająca na nią siła naciągu sprężyny będzie większa od siły ciężkości. W chwili oderwania oznacza to, że

$$k(z_0 - l_0) = m_2 g, \tag{1}$$

gdzie z_0 jest wysokością górnej płyty nad podłogą w tym momencie. Ponieważ w wyniku zderzenia cała energia kinetyczna dolnej płyty jest tracona, a energia górnej jest przekształcana w energię sprężystości sprężyny, z zasady zachowania energii otrzymujemy w granicznym przypadku

$$m_1 g (h_0 + l_0) = m_1 g z_0 + \frac{k}{2}(z_0 - l_0)^2. \tag{2}$$

Uwzględniając wzór (1) dostajemy

$$m_1 g (h_0 + l_0) = m_1 g \left(\frac{m_2 g}{k} + l_0\right) + \frac{k}{2}\left(\frac{m_2 g}{k}\right)^2.$$

Stąd

$$h_0 = \frac{m_2 g}{k}\left(1 + \frac{m_2}{2m_1}\right). \tag{3}$$

2. Gdy $h > h_0$ dolna płyta również oderwie się w chwili, gdy górna płyta będzie na wysokości $z_0 = m_2 g/k + l_0$ (patrz pkt 1.). Zasada zachowania energii ma w tym momencie postać

$$m_1 g (h + l_0) = m_1 g z_0 + \frac{k}{2}(z_0 - l_0)^2 + \frac{m_1}{2} v_1^2, \tag{4}$$

gdzie v_1 jest prędkością górnej płyty w chwili oderwania. Uwzględniając (2) wynosi ona

$$v_1 = \sqrt{2g(h - h_0)}. \tag{5}$$

W tym momencie prędkość środka masy płyt wynosi

$$\begin{aligned} v_{\text{ŚM}} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2g(h - h_0)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Środek masy znajduje się w tym momencie na wysokości

$$z_{\text{ŚM}} = \frac{m_1 z_0}{m_1 + m_2}. \tag{7}$$

Dalszy ruch układu jest złożeniem ruchu środka masy i drgań wokół niego. Energia drgań nie ulega zmianie, a energia kinetyczna środka masy przekształca się w energię potencjalną. Zatem maksymalna wysokość środka masy $z_{\text{ŚMmax}}$ jest określona przez zasadę zachowania energii

$$\frac{m_1 + m_2}{2}\left(v_{\text{ŚM}}\right)^2 + (m_1 + m_2) g z_{\text{ŚM}} = (m_1 + m_2) g z_{\text{ŚMmax}}. \tag{8}$$

Stąd

$$\begin{aligned} z_{\text{ŚMmax}} &= z_{\text{ŚM}} + \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}(h - h_0) \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\frac{m_2 g}{k} + l_0\right) + \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\left[h - \frac{m_2 g}{k}\left(1 + \frac{m_2}{2m_1}\right)\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

3. Od chwili oderwania się dolnej płyty od podłogi, środek masy układu porusza się z przyspieszeniem $-g$. Zatem czas jego ruchu do najwyższego położenia wynosi

$$\begin{aligned} T_{\text{wzn}} &= \frac{v_{\text{ŚM}}}{g} \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2\frac{h - h_0}{g}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Ruch dolnej płyty jest złożeniem ruchu środka masy i drgań wokół niego. Przy zmianie odległości górnej płyty od środka masy o Δx sprężyna ulega wydłużeniu o $\Delta x \cdot (m_1 + m_2)/m_2$, a zatem jej napięcie zmienia się o $\Delta F = k_1 \Delta x$, gdzie $k_1 = k \cdot (m_1 + m_2)/m_2$. Częstość drgań ω jest równa $\sqrt{k_1/m_1}$, czyli

$$\omega = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}. \tag{11}$$

Do osiągnięcia przez środek masy maksymalnej wysokości, płyty powinny wykonać całkowitą liczbę drgań, czyli

$$T_{\text{wzn}} = n\frac{2\pi}{\omega}, \tag{12}$$

gdzie n jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą. Rozwiązując to równanie względem h (po uwzględnieniu (10) oraz (12)) otrzymamy

$$h = h_0 + n^2\frac{2\pi^2 g\,(m_1+m_2)\,m_2}{m_1 k}. \tag{13}$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy $h_0 = 0,15$ m i dla $n = 1$

$$h \approx 4,0\,\text{m}. \tag{14}$$