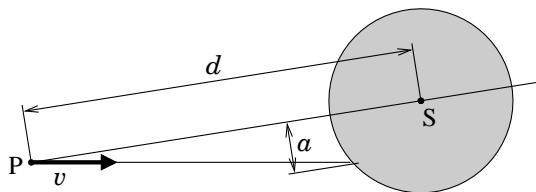


Zadanie 1

Na poziomej płaszczyźnie znajduje się jednorodny, cienki, początkowo nieruchomy krążek o promieniu R i masie M . W chwili $t_0 = 0$ z punktu P na tej płaszczyźnie, odległego o d od środka krążka S , jest wystrzeliwany z prędkością v mały pocisk o masie m . Pocisk ślizga się po płaszczyźnie, a następnie uderza w krążek i przyczepia się do niego w miejscu zderzenia, w odległości a od osi PS (rys. 1). Nie ma tarcia między płaszczyzną a krążkiem oraz między płaszczyzną a pociskiem.



rys. 1 Krążek i pocisk – widok z góry

Po jakim najmniejszym czasie $t > 0$ należy oddać drugi strzał, by drugi pocisk trafił w krążek w miejscu uderzenia pierwszego pocisku? Drugi strzał oddajemy takim samym pociskiem, z tego samego miejsca, w takim samym kierunku i z taką samą prędkością początkową jak pierwszy.

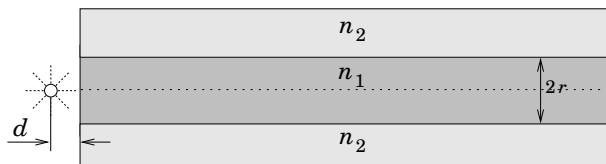
Podaj wynik liczbowy dla $M = 100$ g, $m = 10$ g, $R = 0,05$ m, $a = 0,04$ m, $v = 10$ m/s, $d = 2$ m.

Moment bezwładności krążka względem jego osi symetrii obrotowej wynosi $I_0 = MR^2/2$.

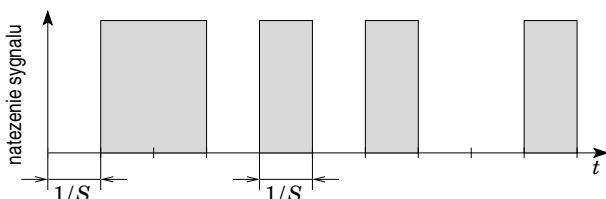
Zadanie 2

Rozważmy następujący model światłowodu (tzw. wielomodowego): walcowaty rdzeń o promieniu $r = 25 \mu\text{m}$ i współczynniku załamania $n_1 = 1,475$ jest otoczony otuliną (której grubość nie ma znaczenia dla zachowania światłowodu) o współczynniku załamania $n_2 = 1,460$.

W odległości $d = 25 \mu\text{m}$ od początku światłowodu umieszczono na jego osi symetrii punktowe, izotropowe źródło promieniowania elektromagnetycznego o mocy $P = 1$ mW wysyłające promieniowanie o długości fali $1,55 \mu\text{m}$ (rys. 2).



rys. 2 Światłowód oraz źródło promieniowania



rys. 3 Sygnał odpowiadający ciągowi 0110101001.

Oblicz jaka jest maksymalna odległość L na jaką można przesyłać tym światłowodem informacje z szybkością S równą a) 1 Gb/s, b) 1 Mb/s, c) 1 kb/s, gdzie b/s oznacza bit/sekundę.

Uwzględnij że:

- Współczynnik tłumienia α zdefiniowany jako:

$$\alpha = (10/L) \log_{10}(E_{out}/E_{in})$$

gdzie E_{out} jest energią sygnału po przebyciu odległości L , jeśli na wejściu jego energia wynosiła E_{in} , jest w przypadku rdzenia równy $\alpha = -0,02/\text{km}$.

- Detektor rejestrujący impuls na końcu światłowodu jest w stanie zarejestrować impulsy o energii większej niż $E_d = 10^{-15}$ J.

- Pojedynczy impuls (bit) ma początkowo kształt prostokąta o szerokości $1/S$ (przez szerokość rozumiemy tu odstęp czasu między

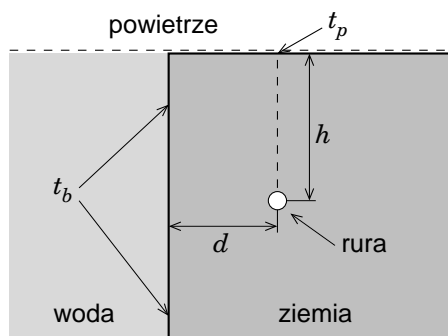
początkiem a końcem wysyłania tego impulsu – rys. 3).

Uznajemy, że informacji nie da się przesyłać, jeśli w wyniku przesyłania czas trwania pojedynczego impulsu wzrasta więcej niż dwukrotnie.

- Parametry w zadaniu są dobrane tak, że można pominąć falową naturę promieniowania i traktować je jako wiązkę promieni.
- Promieniowanie, które znajdzie się w otulinie, jest tak szybko tłumione, że jego rolę w przesyłaniu informacji można pominąć.
- Źródło promieniowania umieszczone jest w powietrzu (przyjmij, że współczynnik załamania $n = 1$), a odbicie na granicy powietrze-ziemia można pominąć.
- Prędkość światła w próżni wynosi $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s.

Zadanie 3

Energia cieplna jest przesyłana z elektrociepłowni za pomocą prostej metalowej rury, wewnątrz której płynie gorąca woda. Rura biegnie na głębokości h pod powierzchnią ziemi, w odległości d od kanału wypełnionego wodą, równoległe do niego (rys. 4). Wiadomo, że temperatura ziemi tuż pod powierzchnią, dokładnie nad rurą, wynosi t_p , a temperatura wody i stykającej się z nią ziemi wynosi t_b .



rys. 4 Rura ciepłownicza w ziemi.

a) Oblicz szybkość strat ciepła na jednostkę długości rury, tzn. ilość ciepła wypływającą do ziemi w jednostce czasu z odcinka rury o jednostkowej długości.

b) Wiedząc, że promień rury wynosi R , oblicz jej temperaturę.

W pkt. a) i b) podaj wyniki liczbowe dla $h = 3$ m, $d = 2$ m, $t_p = 10^\circ\text{C}$, $t_b = 4^\circ\text{C}$, $R = 0,1$ m, przewodnictwa cieplnego ziemi $\sigma = 0,7$ W/(m·K).

Przyjmij następujące upraszczające założenia:

- powierzchnia ziemi jest płaska i pozioma; nie przepływa przez nią ciepło (tzn. przyjmujemy, że powietrze jest izolatorem cieplnym);
- kanał ma nieskończoną głębokość i jest wypełniony wodą aż do powierzchni ziemi; jego brzeg jest pionowy i w każdym punkcie ma temperaturę t_b ;
- ziemia jest jednorodna; jej temperatura w dowolnym miejscu nie ulega zmianie w czasie;
- średnica rury jest mała w porównaniu z h i d , a jej temperatura jest stała;
- nie ma transportu energii przez promieniowanie.

Przewodnictwo cieplne σ jest zdefiniowane następująco:

Rozważmy dwie bliskie, odległe o Δr , równoległe powierzchnie, każda o polu S . Obszar między nimi jest wypełniony ośrodkiem o przewodnictwie cieplnym σ . Jeśli na jednej z tych powierzchni temperatura wynosi t , a na drugiej $t + \Delta t$, to strumień energii cieplnej (ciepło w jednostce czasu), płynący prostopadłe do nich, jest równy $J_S = \sigma \Delta t / \Delta r$.

Wzory, które mogą być przydatne w zadaniach 1-3

$$\int \frac{dx}{\alpha + \beta x} = \frac{1}{\beta} \ln|\alpha + \beta x| + \text{const}$$

$$\int (\alpha + \beta x)^\gamma dx = \frac{1}{(\gamma + 1)\beta} (\alpha + \beta x)^{\gamma + 1} + \text{const}, \text{ gdzie } \gamma \neq -1$$

Kąt bryłowy w wierzchołku stożka o kącie rozwarcia 2θ wynosi $\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$.

Rozwiązanie zadania 1

Po uderzeniu pocisku w krążek układ będzie się obracał ze stałą prędkością kątową wokół swojego środka masy, który będzie się poruszał ze stałą prędkością po linii prostej. Środek masy układu znajduje się w odległości

$$x = \frac{mR}{m+M} \quad (1)$$

od środka krążka. Z twierdzenia Steinera moment bezwładności układu względem środka masy wynosi

$$\begin{aligned} I &= I_0 + Mx^2 + m(R-x)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{m}{M+m} \right) MR^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Prędkość kątową ω układu po zderzeniu jest określona przez zasadę zachowania momentu pędu (poniżej liczymy momenty pędu względem środka masy układu)

$$I\omega = mv \frac{b}{R} (R-x), \quad (3)$$

gdzie b jest odległością środka kuli od prostej, po której początkowo porusza się pocisk. Z powyższego

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{mMbv}{(M+m)I} \\ &= 2 \frac{mbv}{(M+3m)R^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Prędkość środka masy po zderzeniu jest określona przez zasadę zachowania pędu i wynosi

$$u = \frac{mv}{m+M}. \quad (5)$$

Aby drugi pocisk uderzył w krążek w tym samym miejscu co pierwszy, układ powinien wykonać pełny obrót. Zatem czas między zderzeniami powinien wynosić $T = 2\pi/\omega$. Dodatkowy czas ruchu drugiego pocisku (w porównaniu z pierwszym) wynosi $T - t$ i przebywa on w tym czasie dodatkową drogę $(T - t)v$. Ta droga jest równa drodze przebytej przez środek masy układu do chwili drugiego zderzenia, czyli

$$(T - t)vt = uT. \quad (6)$$

Stąd

$$\begin{aligned} t &= \frac{M}{m+M}T \\ &= \frac{M}{m+M} \frac{(M+3m)R^2}{mbv} \pi. \end{aligned} \quad (7)$$

Musimy jeszcze wyznaczyć parametr b poprzez a , d i R .

Oznaczmy przez U punkt, w którym pocisk uderzył w krążek, przez A – punkt na odcinku \overline{PS} , taki, że $\overline{PS} \perp \overline{UA}$ (co oznacza, że $UA = a$) i przez B – punkt na przedłużeniu odcinka \overline{PU} taki, że $\overline{BS} \perp \overline{PU}$ (co oznacza, że $BS = b$). Z tych definicji, twierdzenia Pitagorasa i podobieństwa trójkątów PUA i PSB wynika: $AS = \sqrt{R^2 - a^2}$, $PA = d - AS$, $b/d \stackrel{\Delta}{=} a/(PU)$, $PU = \sqrt{a^2 + (PA)^2}$, stąd

$$b = \frac{ad}{\sqrt{d^2 + R^2 - 2d\sqrt{R^2 - a^2}}}. \quad (8)$$

Zatem ostatecznie

$$t = \frac{M}{m+M} \frac{(M+3m)R^2}{mv} \frac{\sqrt{d^2 + R^2 - 2d\sqrt{R^2 - a^2}}}{ad} \pi. \quad (9)$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy:

$$t \approx 0,23 \text{ s}. \quad (10)$$