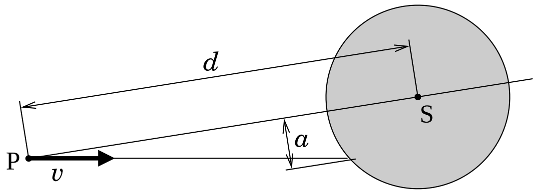
LVII OLIMPIADA FIZYCZNA – ZAWODY III STOPNIA

Zadanie 1

Na poziomej płaszczyźnie znajduje sie jednorodny, cienki, początkowo nieruchomy krążek o promieniu R i masie M. W chwili $t_0 = 0$ z punktu P na tej płaszczyźnie, odległego o d od środka krążka S, jest wystrzeliwany z prędkością v mały pocisk o masie m. Pocisk ślizga się po płaszczyźnie, a następnie uderza w krążek i przyczepia się do niego w miejscu zderzenia, w odległości a od osi PS (rys. 1). Nie ma tarcia między płaszczyzną a krążkiem oraz między płaszczyzną a pociskiem.

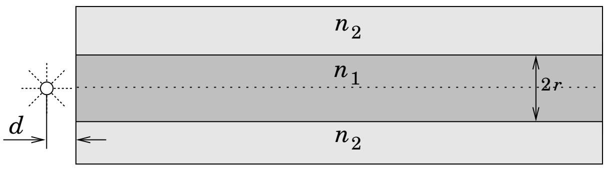


rys. 1 Krążek i pocisk – widok z góry

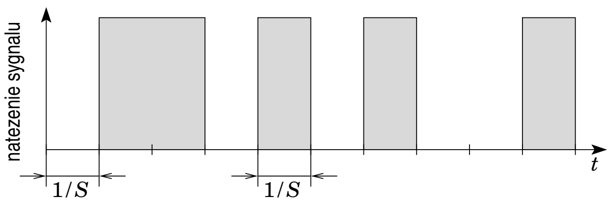
Po jakim najmniejszym czasie $t > 0$ należy oddać drugi strzał, by drugi pocisk trafił w krążek w miejscu uderzenia pierwszego pocisku? Drugi strzał oddajemy takim samym pociskiem, z tego samego miejsca, w takim samym kierunku i z taką samą prędkością początkową jak pierwszy.
Podaj wynik liczbowy dla $M = 100\,\mathrm{g}$, $m = 10\,\mathrm{g}$, $R = 0{,}05\,\mathrm{m}$, $a = 0{,}04\,\mathrm{m}$, $v = 10\,\mathrm{m/s}$, $d = 2\,\mathrm{m}$.
Moment bezwładności krążka względem jego osi symetrii obrotowej wynosi $I_0 = MR^2/2$.

Zadanie 2

Rozważmy następujący model światłowodu (tzw. wielomodowego): walcowaty rdzeń o promieniu $r = 25\,\mu\mathrm{m}$ i współczynniku załamania $n_1 = 1{,}475$ jest otoczony otuliną (której grubość nie ma znaczenia dla zachowania światłowodu) o współczynniku załamania $n_2 = 1{,}460$.
W odległości $d = 25\,\mu\mathrm{m}$ od początku światłowodu umieszczono na jego osi symetrii punktowe, izotropowe źródło promieniowania elektromagnetycznego o mocy $P = 1\,\mathrm{mW}$ wysyłające promieniowanie o długości fali $1{,}55\,\mu\mathrm{m}$ (rys. 2).



rys. 2 Światłowód oraz źródło promieniowania



rys. 3 Sygnał odpowiadający ciągowi 0110101001.

Oblicz jaka jest maksymalna odległość L na jaką można przesyłać tym światłowodem informacje z szybkością S równą a) 1 Gb/s, b) 1 Mb/s, c) 1 kb/s, gdzie b/s oznacza bit/sekundę.
Uwzględnij że:

- Współczynnik tłumienia α zdefiniowany jako:

$$\alpha = (10/L)\log_{10}(E_{out}/E_{in})$$

gdzie E_{out} jest energią sygnału po przebyciu odległości L, jeśli na wejściu jego energia wynosiła E_{in}, jest w przypadku rdzenia równy $\alpha = -0{,}02$/km.

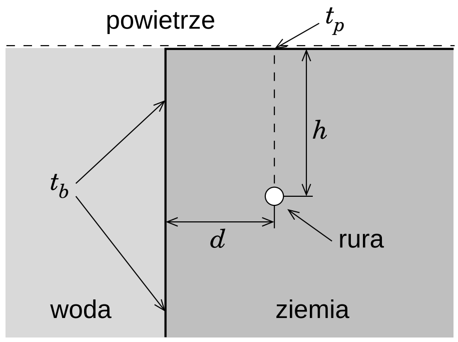
- Detektor rejestrujący impuls na końcu światłowodu jest w stanie zarejestrować impulsy o energii większej niż $E_d = 10^{-15}$ J.
- Pojedyńczy impuls (bit) ma początkowo kształt prostokąta o szerokości $1/S$ (przez szerokość rozumiemy tu odstęp czasu między początkiem a końcem wysyłania tego impulsu – rys. 3).

Uznajemy, że informacji nie da się przesyłać, jeśli w wyniku przesyłania czas trwania pojedyńczego impulsu wzrasta więcej niż dwukrotnie.

- Parametry w zadaniu są dobrane tak, że można pominąć falową naturę promieniowania i traktować je jako wiązkę promieni.
- Promieniowanie, które znajdzie się w otulinie, jest tak szybko tłumione, że jego rolę w przesyłaniu informacji można pominąć.
- Źródło promieniowania umieszczone jest w powietrzu (przyjmij, że współczynnik załamania $n = 1$), a odbicie na granicy powietrze-rdzeń można pominąć.
- Prędkość światła w próżni wynosi $c \approx 3\cdot 10^8$m/s.

Zadanie 3

Energia cieplna jest przesyłana z elektrociepłowni za pomocą prostej metalowej rury, wewnątrz której płynie gorąca woda. Rura biegnie na głębokości h pod powierzchnią ziemi, w odległości d od kanału wypełnionego wodą, równolegle do niego (rys. 4). Wiadomo, że temperatura ziemi tuż pod powierzchnią, dokładnie nad rurą, wynosi t_p, a temperatura wody i stykającej się z nią ziemi wynosi t_b.



rys. 4 Rura ciepłownicza w ziemi.

a) Oblicz szybkość strat ciepła na jednostkę długości rury, tzn. ilość ciepła wypływającą do ziemi w jednostce czasu z odcinka rury o jednostkowej długości.
b) Wiedząc, że promień rury wynosi R, oblicz jej temperaturę.

W pkt. a) i b) podaj wyniki liczbowe dla $h = 3\,\mathrm{m}$, $d = 2\,\mathrm{m}$, $t_p = 10^\circ\mathrm{C}$, $t_b = 4^\circ\mathrm{C}$, $R = 0{,}1\,\mathrm{m}$, przewodnictwa cieplnego ziemi $\sigma = 0{,}7\,\mathrm{W/(m{\cdot}K)}$.
Przyjmij następujące upraszczające założenia:

- powierzchnia ziemi jest płaska i pozioma; nie przepływa przez nią ciepło (tzn. przyjmujemy, że powietrze jest izolatorem cieplnym);
- kanał ma nieskończoną głębokość i jest wypełniony wodą aż do powierzchni ziemi; jego brzeg jest pionowy i w każdym punkcie ma temperaturę t_b;
- ziemia jest jednorodna; jej temperatura w dowolnym miejscu nie ulega zmianie w czasie;
- średnica rury jest mała w porównaniu z h i d, a jej temperatura jest stała;
- nie ma transportu energii przez promieniowanie.

Przewodnictwo cieplne σ jest zdefiniowane następująco:
Rozważmy dwie bliskie, odległe o Δr, równoległe powierzchnie, każda o polu S. Obszar między nimi jest wypełniony ośrodkiem o przewodnictwie cieplnym σ. Jeśli na jednej z tych powierzchni temperatura wynosi t, a na drugiej $t + \Delta t$, to strumień energii cieplnej (ciepło w jednostce czasu), płynący prostopadle do nich, jest równy $J_S = S\sigma\,\Delta t/\Delta r$.

Wzory, które mogą być przydatne w zadaniach 1-3

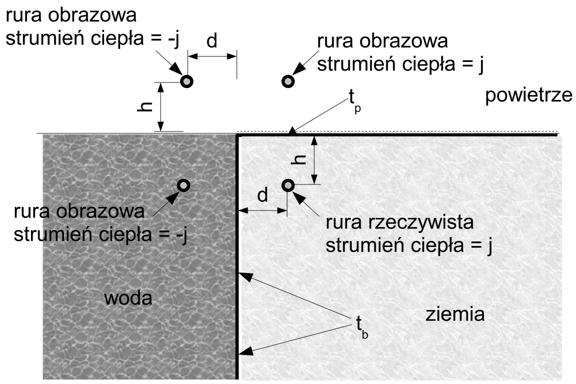
$$\int \frac{dx}{\alpha+\beta x} = \frac{1}{\beta}\ln|\alpha+\beta x| + \mathrm{const}$$

$$\int (\alpha+\beta x)^\gamma\, dx = \frac{1}{(\gamma+1)\beta}(\alpha+\beta x)^{\gamma+1} + \mathrm{const},\ \text{gdzie } \gamma \neq -1$$

Kąt bryłowy w wierzchołku stożka o kącie rozwarcia 2θ wynosi $\Omega = 2\pi(1-\cos\theta)$.

Rozwiązanie zadania 3

Zagadnienie jest analogiczne do zagadnienia elektrostatycznego, w którym występuje jednorodnie naładowany prostoliniowy przewód, zatem wykorzystamy znaną z elektrostatyki metodę obrazów.
Na granicy woda–ziemia żądamy, by temperatura była stała. Można to osiągnąć umieszczając (formalnie) w wodzie rurę będącą odbiciem względem tej granicy rury rzeczywistej. Strumień ciepła wypływający z tej fikcyjnej rury powinien być równy minus strumieniowi ciepła wypływającego z rury rzeczywistej (podobnie jak ładunek obrazowy "wewnątrz" przewodnika jest równy minus ładunkowi rzeczywistemu).
Przez poziomą granicę ziemia–powietrze ciepło nie przepływa. W analogii elektrostatycznej oznacza to, że nie występuje składowa pola elektrycznego styczna do tej granicy. Taki efekt można osiągnąć umieszczając "obrazową" rurę ponad tą granicą. Strumień ciepła wypływający z tej rury powienien być identyczny jak strumień ciepła wypływający z rury rzeczywistej. Analogiczną rurę "obrazową" (odbicie "obrazu" znajdującego się w wodzie) powinniśmy umieścić w powietrzu ponad wodą. W sumie sytuację określającą przepływ ciepła i temperaturę w ziemi przedstawia rysunek.



Rura rzeczywista i rury "obrazowe"

Zatem ciepło w ziemi płynie tak, jakby w pozostałym obszarze, traktowanym tak, jakby to również była ziemia, były umieszczone jeszcze trzy rury.
Wyznaczmy teraz temperaturę t w odległości r od środka rury z której na jednostkę długości wypływa strumień ciepła j, przy założeniu, że znajduje się ona w jednorodnym ośrodku o przewodnictwie cieplnym σ i nie ma innych źródeł ciepła. Strumień ciepła płynący przez powierzchnię boczną współśrodkowego z rurą walca o promieniu r i długości ΔL jest równy $j\Delta L$, zatem zgodnie definicją przewodnictwa cieplnego (poniżej znak "-" uwzględnia, że ze wzrostem odległości temperatura maleje)

$$\frac{\Delta t}{\Delta r} = -\frac{j\Delta L}{S\sigma} = -\frac{j}{\sigma}\frac{1}{2\pi r}.$$

Przechodząc z Δr do 0 otrzymamy

$$t(r)' = \frac{j}{\sigma}\frac{1}{2\pi r},$$

stąd całkując

$$t(r) = t_0 - \frac{j}{2\pi\sigma}\ln\frac{r}{r_0}, \tag{1}$$

gdzie t_0 i r_0 są stałymi. Jest to wzór analogiczny do wzoru na potencjał od nieskończonego drutu naładowanego na jednostkę długości ładunkiem j.
Temperatura w dowolnym punkcie ziemi jest sumą temperatur pochodzących od rury rzeczywistej oraz rur obrazowych (podobnie jak potencjał elektryczny jest sumą potencjałów pochodzących od każdego ładunku). W punkcie tuż pod powierzchnią ziemi, pionowo nad rzeczywistą rurą, otrzymujemy

$$t_p = -\frac{j}{2\pi\sigma}\ln\frac{h}{r_0} - \frac{-j}{2\pi\sigma}\ln\frac{\sqrt{h^2+(2d)^2}}{r_0} - \frac{j}{2\pi\sigma}\ln\frac{h}{r_0} - \frac{-j}{2\pi\sigma}\ln\frac{\sqrt{h^2+(2d)^2}}{r_0} + 4t_0. \tag{2}$$

W punkcie na brzegu na głebokości y otrzymujemy

$$t_b = -\frac{j}{2\pi\sigma}\ln\frac{\sqrt{(y-h)^2+d^2}}{r_0} - \frac{-j}{2\pi\sigma}\ln\frac{\sqrt{(y-h)^2+d^2}}{r_0} + \\ -\frac{j}{2\pi\sigma}\ln\frac{\sqrt{(y+h)^2+d^2}}{r_0} - \frac{-j}{2\pi\sigma}\ln\frac{\sqrt{(y+h)^2+d^2}}{r_0} + 4t_0. \tag{3}$$

Zatem $4t_0 = t_b$ oraz

$$t_p - t_b = \frac{j}{\pi\sigma}\ln\frac{\sqrt{h^2+4d^2}}{h} = \frac{j}{2\pi\sigma}\ln\left(1+4\frac{d^2}{h^2}\right). \tag{4}$$

(Zauważmy, że gdybyśmy przyjeli stałe t_0 i r_0 różne dla różnych rur, powyższy wynik nie uległby zmianie.)
Ostatecznie otrzymujemy

$$j = 2\pi\sigma\frac{t_p - t_b}{\ln\left(1+4\frac{d^2}{h^2}\right)}. \tag{5}$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy

$$j \approx 26\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}}. \tag{6}$$

Temperatura górnej krawędzi prawdziwej rury jest sumą wkładów od wszystkich czterech źródeł ciepła

$$t_r = t_b - \frac{j}{2\pi\sigma}\ln\frac{R}{r_0} + \frac{j}{2\pi\sigma}\ln\frac{\sqrt{4d^2+R^2}}{r_0} - \frac{j}{2\pi\sigma}\ln\frac{2h-R}{r_0} + \frac{j}{2\pi\sigma}\ln\frac{\sqrt{4d^2+(2h-R)^2}}{r_0}.$$

Dla dolnej krawędzi powinniśmy zastąpić w powyższym wzorze $2h-R$ przez $2h+R$. Zgodnie z założeniami z treści zadania $2h-R \approx 2h-R \approx 2h$, $4d^2+R^2 \approx 4d^2$, zatem temperatura rury wynosi

$$t_r = t_b + \frac{j}{2\pi\sigma}\left(\ln\frac{2d}{R} + \ln\frac{\sqrt{d^2+h^2}}{h}\right). \tag{7}$$

Uwzględniając nasz wynik na j otrzymujemy

$$t_r = t_b + \frac{t_p - t_b}{\ln\left(1+4\frac{d^2}{h^2}\right)}\left[\ln\frac{2d}{R} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{d^2}{h^2}\right)\right]. \tag{8}$$

(Pominięcie w powyższym wzorze wyrazu $\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{d^2}{h^2}\right)$ jest w naszym przypadku również bardzo dobrym przybliżeniem.)
Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy

$$t_r \approx 27\ ^o\mathrm{C}. \tag{9}$$

Ta temperatura jest sporo niższa od temperatury wody ciepłowniczej, co zapewne oznacza, że w rozważanym przypadku między zewnętrzną powierzchnią rury, a jej częścią stykająca się z wodą znajduje się warstwa izolacji cieplnej.