LVIII OLIMPIADA FIZYCZNA (2008/2009). Stopień II, zadanie teoretyczne – T2.

Źródło: Komitet Główny Olimpiady Fizycznej

Nazwa zadania: Klocek na równi pochyłej

Działy: Dynamika

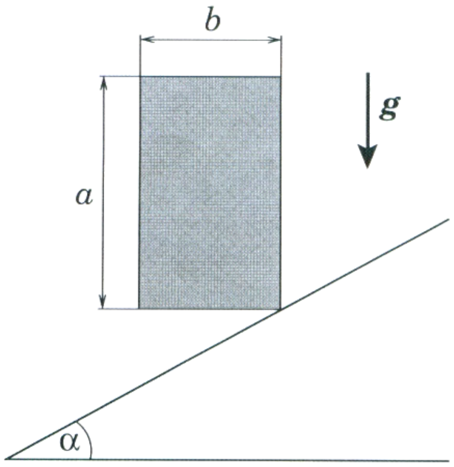
Słowa kluczowe: klocek, równia pochyła, współczynnik tarcia, moment bezwładności, środek masy

Zadanie teoretyczne – T2, zawody II stopnia, LVIII OF.

Jednorodny, prostopadłościenny klocek o wymiarach $a \times b \times c$ postawiono na równi pochyłej o kącie nachylenia α (rys. 1). W momencie postawienia klocek się nie obraca, krawędzie o długości a są pionowe, a krawędź o długości c styka się z równią. Zauważono, że w pierwszej chwili po postawieniu klocek nie ślizga się po równi, lecz obraca się względem osi styczności z równią.

Ile wynosi najmniejsza wartość współczynnika tarcia μ_{gr}, dla której jest to możliwe? Dla $a = b$ przedyskutuj zależność μ_{gr} od α i naszkicuj wykres tej zależności.

Moment bezwładności jednorodnego prostopadłościanu o masie m względem osi obrotu przechodzącej przez jego środek masy i równoległej do krawędzi o długości c jest równy $I_0 = m\,(a^2 + b^2)\,/\,12$.



Rys. 1

Rozwiązanie

Ponieważ klocek obraca się wokół osi styczności z równią, jego przyspieszenie kątowe ε spełnia związek

$$mg\,\frac{b}{2} = \left[I_0 + m\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right)\right]\varepsilon, \tag{1}$$

stąd

$$\varepsilon = \frac{gb}{2[I_0/m + (a^2+b^2)/4]}. \tag{2}$$

Z zależności geometrycznych przyspieszenie środka masy klocka wzdłuż równi a_x oraz prostopadłe do niej a_y są dane równaniami

$$a_x = \varepsilon\left(\frac{b}{2}\sin\alpha + \frac{a}{2}\cos\alpha\right), \tag{3}$$
$$a_y = \varepsilon\left(\frac{b}{2}\cos\alpha + \frac{a}{2}\sin\alpha\right), \tag{4}$$

Z równań ruchu środka masy mamy

$$mg\sin\alpha - T = ma_x, \tag{5}$$

$$mg\sin\alpha - N = ma_y. \tag{6}$$

gdzie T jest siłą tarcia (dodatnie T oznacza, że jest skierowane w górę równi), a N jest siłą reakcji równi.
Zatem

$$\frac{T}{N} = \frac{g\sin\alpha - a_x}{g\cos\alpha - a_y} =$$

$$= \frac{g\sin\alpha - \frac{\varepsilon\,(b\sin\alpha + a\cos\alpha)}{2}}{g\cos\alpha - \frac{\varepsilon\,(b\cos\alpha + a\sin\alpha)}{2}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{4\,I_0}{m} + a^2\right)\sin\alpha - ab\cos\alpha}{\left(\frac{4\,I_0}{m} + a^2\right)\cos\alpha + ab\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\left(\frac{4\,a^2}{3} + \frac{b^2}{3}\right)\sin\alpha - ab\cos\alpha}{\left(\frac{4\,a^2}{3} + \frac{b^2}{3}\right)\cos\alpha - ab\sin\alpha} = \tag{7}$$

$$= \mathrm{tg}(\alpha - \beta), \tag{8}$$

gdzie β jest określone równaniem

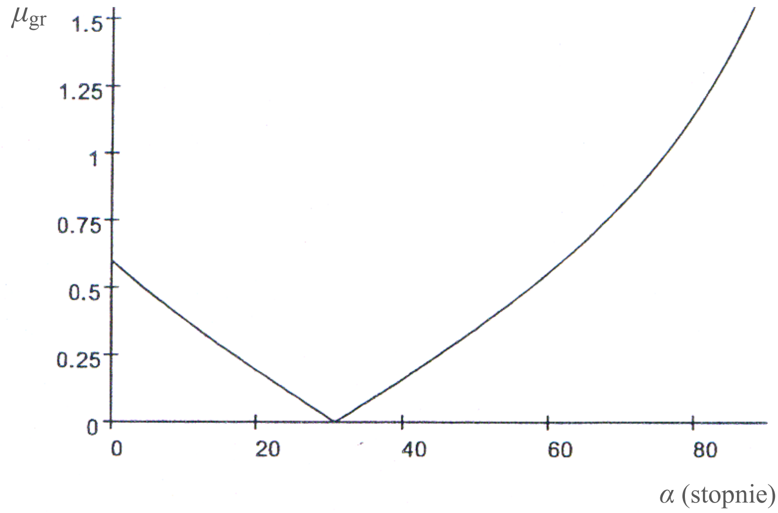
$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{ab}{\left(\frac{4I_0}{m} + a^2\right)} = \frac{3ab}{(4a^2 + b^2)}. \tag{9}$$

Z definicji współczynnika tarcia $\mu \geq |T/N|$, zatem jego szukana wartość graniczna jest równa

$$\mu_{gr} = \left|\frac{\left(4\,a^2 + b^2\right)\sin\alpha - 3\,ab\cos\alpha}{\left(4\,a^2 + b^2\right)\cos\alpha - 3\,ab\sin\alpha}\right| = \tag{10}$$

$$= |\mathrm{tg}(\alpha - \beta)| \tag{11}$$

Zauważmy, że nawet dla bardzo małych wartości α szukane μ_{gr} jest niezerowe, następnie maleje ze wzrostem α i osiąga wartość 0 dla $\alpha = \beta$, a następnie rośnie. (Zauważmy, że ogólny charakter tej zależności nie zależy od konkretnych wartości a i b - pod warunkiem, że $a \neq 0$ i $b \neq 0$.)



Zależność μ_{gr} od kąta nachylenia równi przy $a = b$.

II sposób

Jeśli T jest siłą tarcia (dodatnie T oznacza, że jest skierowane w górę równi), a N jest siłą reakcji równi, to równanie ruchu obrotowego względem środka masy klocka przyjmuje postać

$$I_0\varepsilon = N\left(\frac{b}{2}\cos\alpha - \frac{a}{2}\sin\alpha\right) + T\left(\frac{b}{2}\sin\alpha + \frac{a}{2}\cos\alpha\right). \tag{12}$$

Równania ruchu środka masy są dane wzorami (5) i (6).
Przez krawędź klocka stykającą się z równią przechodzi oś obrotu, co oznacza, że przyspieszenie tego boku jest równe zero

$$a_x - \varepsilon\left(\frac{b}{2}\sin\alpha + \frac{a}{2}\cos\alpha\right) = 0, \tag{13}$$
$$a_y - \varepsilon\left(\frac{b}{2}\cos\alpha + \frac{a}{2}\sin\alpha\right) = 0, \tag{14}$$

Z równań (12), (5), (6), (13) i (14) można wyznaczyć przyspieszenie kątowe klocka dane wzorem (2), a następnie stosunek T / N dany wzorem (7). Dalsza analiza przebiega jak w I sposobie.

Proponowana punktacja

1. Równanie ruchu obrotowego (wzór (1) lub wzór (12) lub równoważny) 1 pkt.
2. Równania ruchu środka masy (wzory (5) i (6) lub równoważne) 1 pkt.
3. Związki (wzory (3) i (4) lub (13) i (14) lub równoważne) wynikające z faktu, że oś styczności klocka z równią jest chwilową osią obrotu 2 pkt.
4. Wyznaczenie przyspieszenia kątowego (wzór (2)) 5 pkt.
5. Szukane μ_{gr} (wzór (10) lub równoważny) 2 pkt.
6. Dyskusja zależności μ_{gr} od α (funkcja malejąca w przedziale $[0, \beta]$, gdzie β jest pewnym kątem określonym przez a i b, $\mu_{gr} = 0$ dla $\alpha = \beta$, funkcja rosnąca w przedziale $[\beta, 90^{\circ}]$ i szkic wykresu 2 pkt.