VI OLIMPIADA FIZYCZNA

(1956/1957)

ZAWODY III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Zadanie teoretyczne – T1

Nazwa – Ruch ciężarka na sprężynie po jej zwolnieniu.

Źródła – Komitet Główny Olimpiady Fizycznej
– Janusz Ostrowski, *Olimpiady Fizyczne V i VI*, Warszawa, PZWS 1963, s. 148–155.

Stalowy drut zwinięty śrubowo stanowi sprężynę, w której przy rozciągnięciu o długość a powstaje napięcie sprężyste równe P. Sprężynę zawieszono pionowo i na jej dolnym końcu umocowano lekką szalkę. Na szalce położono ciało o ciężarze P podpierając ją uprzednio.

1. Jak nisko opadnie szalka, jeżeli usuniemy podporę?
2. Co będzie się działo dalej po opadnięciu szalki do najniższego poziomu?

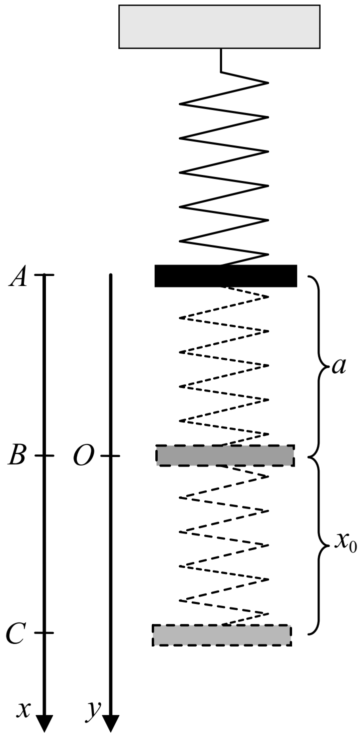
Odpowiedź należy uzasadnić.

Uwaga!
Ciężar szalki i sprężyny należy w obliczeniach pominąć jako nader mały w porównaniu z ciężarem P.

Rozwiązanie zadania T1 – VI OF, III stopień

Sposób I (jakościowo-intuicyjny)

Układ zacznie wykonywać drgania dokoła położenia B będącego położeniem równowagi obciążonej sprężyny (rys. 1); maksymalne odchylenia od równowagi oznaczymy jako położenia A i C.



Rys. 1

Przy pewnej wprawie i wyobraźni mechanicznej zadanie można rozwiązać natychmiast i wówczas przejdzie ono w zadanie problemowe.

Energia kinetyczna w położeniu B ma wartość równą energii potencjalnej w położeniach A i C liczonej względem punktu równowagi B, zatem praca wykonana na drodze AB jest równa pracy wykonanej na drodze BC. Z faktu, że ciężar jest siłą stałą (co do wartości i zwrotu), natomiast siła sprężystości jest tu siłą **proporcjonalną** do wydłużenia, wynika więc równość dróg przebytych od położeń skrajnych do położenia równowagi $AB = BC$.

Rozwiązanie nasuwa zauważenie pewnej symetrii w przemianie energii potencjalnej w kinetyczną oraz w działaniu sił sprężystości.

Sposób II (jakościowy)

Najprostszym rozwiązaniem może być oparcie się na własności ruchu harmonicznego: **wychylenia z położenia równowagi są sobie równe**. Trzeba tylko wykazać, że ruch ciężarka jest ruchem harmonicznym (nietłumionym).

Punkt B jest z definicji położeniem równowagi. Na ciężarek działają dwie siły: ciężar P – jest to siła niezmienna – oraz siła sprężystości sprężyny – jest to siła zmienna, proporcjonalna do odległości od punktu A. Siłę działającą na ciężarek możemy wyrazić wzorem

$$F = P - kx, \tag{1}$$

w którym k oznacza współczynnik sprężystości, x — wychylenie od położenia A (rys. 1).

Aby ruch był harmoniczny, siła musi być proporcjonalna do wychylenia od położenia równowagi oraz musi zmieniać zwrot przy przejściu przez położenie równowagi (w położeniu równowagi ma znikać). Jeśli odległość od położenia równowagi oznaczamy przez y, to będzie

$$y = x - a \tag{2}$$

(znaczenie a jest widoczne z rysunku) i wzór (1) przybierze postać

$$F = P - k(a + y). \tag{3}$$

Dla $x = a$ ze wzoru (1) lub dla $y = 0$ ze wzoru (2), biorąc pod uwagę, że zgodnie z warunkami zadania jest $F(B) = 0$, otrzymamy

$$F(B) = P - ka = 0,$$

czyli

$$F = -ky. \tag{4}$$

Dla odcinka AB mamy $y < 0$, a dla odcinka BC $y > 0$.

Zatem siła F jest proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi i zmienia zwrot przy przejściu przez to położenie.

Sposób III (analityczny)

Przedstawmy obecnie pełne rozwiązanie prowadzące do wyznaczenia odcinka x_0.

Siła zmienna działająca na ciężarek (1) wykonuje na odcinku AB o długości a pracę W. Kosztem tej pracy ciężarek nabywa w położeniu B energię kinetyczną równą tej pracy. Energia kinetyczna zostaje następnie znowu zamieniona całkowicie w pracę W, jaką należy wykonać rozciągając sprężynę do najniższego położenia C – inaczej mówiąc, siła bezwładności ciężarka dzięki nabytej energii kinetycznej wykonuje pracę W **przeciw** sile $F(x)$ na odcinku BC o długości x_0.

Wyznaczmy najpierw współczynnik k. Zgodnie z warunkami zadania, w położeniu równowagi w punkcie B znika siła $F(x)$, czyli

$$F(a) = 0.$$

Wstawiając w (1) otrzymamy

$$k = \frac{P}{a}. \tag{5}$$

Zatem wzór siły F przybiera postać

$$F = P\left(1 - \frac{x}{a}\right). \tag{6}$$

Aby obliczyć pracę siły zmieniającej się liniowo z przebytą drogą – jak to ma miejsce w naszym przypadku – należy obliczyć średnią arytmetyczną wartości, jakie ta siła przybiera w położeniu początkowym i końcowym, i dopiero tę średnią wartość pomnożyć przez długość przebytej drogi.

Średnia wartość siły F na odcinku AB jest

$$F_{AB\acute{s}r} = \frac{F_A(0) + F_{AB}(a)}{2},$$

wobec (6) mamy więc

$$F_{AB\acute{s}r} = \frac{P}{2}. \tag{7}$$

Analogicznie otrzymamy średnią wartość siły F na odcinku BC

$$F_{BC\acute{s}r} = \frac{F_{BC}(a) + F_{BC}(a + x_0)}{2},$$

czyli

$$F_{BC\acute{s}r} = -\frac{Px_0}{2a}. \tag{8}$$

Jak już wyjaśniliśmy wyżej, praca siły F na odcinku a równa jest pracy przeciw tej sile na odcinku x_0, zatem:

$$F_{AB\acute{s}r} \cdot a = -F_{BC\acute{s}r} \cdot x_0$$

(pracę przeciw sile na odcinku BC traktujemy jako ujemną, stąd znak minus).

Wobec (7) i (8) jest

$$\frac{P}{2} \cdot a = \frac{Px_0^2}{2a},$$

skąd

$$x_0^2 = a^2, \tag{9}$$

a więc

$$x_0 = a.$$

Druga wartość $x_0 = -a$ jaką otrzymujemy z równania (9), nie ma sensu fizycznego.

Czytelnik znający elementy rachunku całkowego łatwo obliczy pracę siły $F(x)$ na odcinkach a i x_0. Wartość pracy równa jest wartości całki oznaczonej z siły w granicach przebytej drogi

$$W_{AB} = \int_A^B F(x)dx = \int_0^a F(x)dx.$$

Wstawiając (6) otrzymamy

$$W_{AB} = \int_0^a P\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \left[P\left(x - \frac{x^2}{2a}\right)\right]_0^a = \frac{Pa}{2}$$

Analogicznie

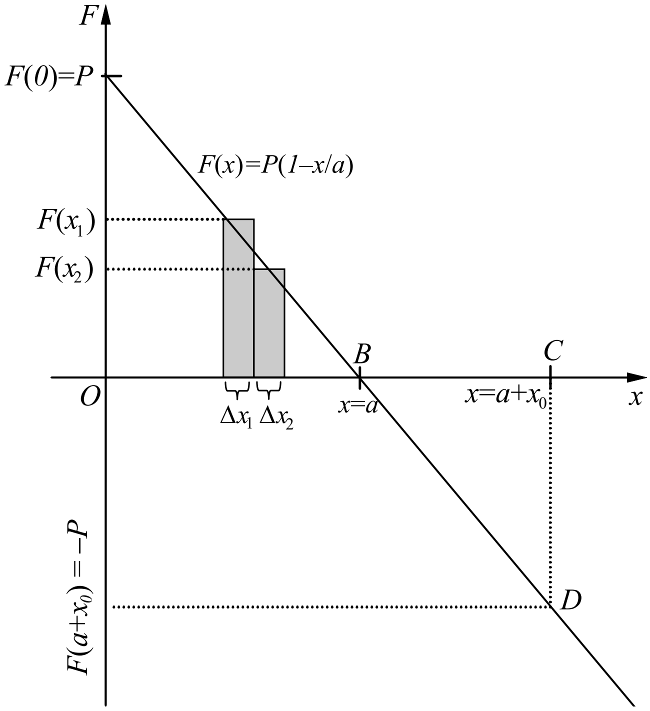
$$W_{BC} = \int_a^{a+x_0} P\left(1 - \frac{x}{a}\right) dx = \left[P\left(x - \frac{x^2}{2a}\right)\right]_a^{a+x_0} = \frac{Px_0^2}{2a}$$

Przedstawmy zależność (1) na wykresie na rys. 2.

Wybierzmy dowolny punkt x_1 na osi poziomej, wartość siły w tym punkcie wynosi

$$F(x_1) = P\left(1 - \frac{x_1}{a}\right) \tag{10}$$

Założmy, że na bardzo małym przesunięciu Δx_1 siła $F(x_1)$ jest stała (poziomy odcinek na



Rys. 2

wykresie rys. 2). Praca wykonana przez siłę stałą $F(x_1)$ na odcinku Δx_1 wynosi

$$W(\Delta x_1) = F(x_1) \cdot \Delta x_1 = P\left(1 - \frac{x_1}{a}\right) \cdot \Delta x_1 \tag{11}$$

i jest liczbowo równa polu pierwszego wąskiego paska prostokątnego na rys. 2.

Podobnie będzie dla innego punktu x_2 i małego przesunięcia Δx_2. Praca

$$W(\Delta x_2) = F(x_2) \cdot \Delta x_2 = P\left(1 - \frac{x_2}{a}\right) \cdot \Delta x_2 \tag{12}$$

jest równa polu drugiego paska prostokątnego.

Całkowita praca na całym odcinku $x = a$ jest sumą prac częściowych, czyli – w geometrycznym obrazie – wyraża się polem trójkąta prostokątnego o bokach P i a

$$W_{AB} = \frac{1}{2}P \cdot a \tag{13}$$

Analogicznie wartość pracy siły F na odcinku x_0 równa jest liczbowo polu trójkąta BCD

$$W_{BC} = \frac{1}{2}Px_0. \tag{14}$$

Ponieważ $W_{AB} = W_{BC}$, więc $x_0 = a$.

Uwaga. Gdybyśmy ciężarek znajdujący się w położeniu A opuszczali powoli do położenia B, gdzie następuje równowaga sił ciężkości i sprężystości, to ciężarek pozostałby w tym położeniu – uniemożliwilibyśmy mu nabycie energii kinetycznej. Jeśli ciężarek opada swobodnie (tzn. poddany jedynie działaniu siły ciężkości i sprężystości), to po minięciu położenia zrównania sił B rozciągnie on sprężynę **siłą bezwładności**.

Sposób IV

Przytoczymy jeszcze (bez istotnych zmian) sposób rozwiązania znaleziony przez jednego z uczniów.

„Na wysokości a od usunięcia podpory ciężar ciała będzie zrównoważony siłą sprężystości sprężyny, przyspieszenie spadającego ciała będzie równe zeru, ale ciało będzie miało największą prędkość. Ciało będzie więc opadać ze średnim przyspieszeniem

$$g_1 = \frac{g+0}{2} = \frac{g}{2}, \tag{15}$$

a jego największa prędkość będzie

$$v_{\max} = g_1 t_1 = \frac{g t_1}{2}, \tag{16}$$

gdzie t_1 jest czasem opadania ciężarka do punktu, w którym będzie miał on największą prędkość.

Dalej ciężarek będzie poruszał się ruchem opóźnionym. Jego opóźnienie g_2 będzie równe

$$g_2 = \frac{F_{\text{śr}}}{m}, \tag{17}$$

gdzie $F_{\text{śr}}$ jest średnią siłą hamującą, a m jest masą ciężarka. Łatwo zauważyć, że

$$F_{\text{śr}} = \frac{P}{2} = \frac{mg}{2} \tag{18}$$

gdyż siła hamująca rośnie od zera do P (do chwili, kiedy zatrzyma się ciężarek). A więc

$$g_2 = \frac{g}{2} = g_1. \tag{19}$$

Skoro $g_1 = g_2$, to czas, w którym ciężarek będzie zmniejszał prędkości, równa się czasowi t_2, w którym ciężarek zyskał tę prędkość. A więc $t_1 = t_2$. Średnie prędkości ciężarka w tych przypadkach są równe, a więc i drogi przebyte przez ciężarek muszą być równe. A zatem po usunięciu podpory ciężarek opadnie na odległość równą $2a$ od poprzedniego położenia.”