LX OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.

Kulista, doskonale czarna sonda kosmiczna "Lord Darth Vader", wykorzystuje do zasilania promieniotwórczy izotop plutonu ^{238}Pu. Pluton o masie m jest umieszczony wewnątrz sondy w pojemniku, którego ścianki całkowicie pochłaniają produkty rozpadu plutonu. Temperatura pojemnika jest równa T_1, temperatura pozostałych elementów sondy nie zmienia się w czasie.

Przyjmując, że moc P wykorzystywana do działania sondy, jest wytwarzana przez idealny (odwracalny) silnik cieplny, który pobiera ciepło z pojemnika z plutonem, oblicz, ile wynosi ta moc.

Rozważ dwa przypadki:

a) cała praca wytworzona przez rozważany silnik jest wykorzystywana (po przetworzeniu na energię elektryczną) do zasilania komputerów pokładowych;

b) cała praca wytworzona przez rozważany silnik jest wysyłana na zewnątrz sondy (np. w postaci wiązki laserowej).

Czas połowicznego rozpadu ^{238}Pu wynosi $t_{1/2} = 87{,}7$ lat. Przyjmij, że rozpad zachodzi zgodnie z reakcją

$$^{238}_{94}\mathrm{Pu} \rightarrow\ ^{234}_{92}\mathrm{U} +\ ^{4}_{2}\mathrm{He}$$

i pomiń inne reakcje jądrowe. Pomiń promieniowanie dochodzące do sondy z zewnątrz. Promień sondy wynosi R.

Wyniki liczbowe podaj dla $m = 2\,\mathrm{kg}$, $T_1 = 500\,\mathrm{K}$, $R = 0{,}5\,\mathrm{m}$.

Masy atomowe wynoszą $m_{^{238}_{94}\mathrm{Pu}} = 238{,}04955\,\mathrm{u}$, $m_{^{234}_{92}\mathrm{U}} = 234{,}04095\,\mathrm{u}$, $m_{^{4}_{2}\mathrm{He}} = 4{,}00260\,\mathrm{u}$, gdzie u $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.

Stała Stefana-Boltzmanna $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2K^4)}$, prędkość światła $c = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$.

Zadanie 2.

Jednorodna rura o momencie bezwładności I względem jej osi, długości L i promieniach: wewnętrznym r_2 i zewnętrznym r_1 (przy czym $L \gg r_1$) znajduje się w jednorodnym, równoległym do jej osi polu magnetycznym o indukcji B_0. Rura jest wykonana z nieprzewodzącego, niemagnetycznego materiału. Jej powierzchnia zewnętrzna jest równomiernie naładowana ładunkiem o całkowitej wartości Q, a powierzchnia wewnętrzna jest równomiernie naładowana ładunkiem o całkowitej wartości $-Q$. Rura może się swobodnie obracać wokół swojej osi, ale początkowo jest nieruchoma. Znajdź końcową prędkość kątową rury, jeśli wartość indukcji zewnętrznego pola magnetycznego zmniejszono powoli od B_0 do 0.

Podaj wynik liczbowy dla $L = 0{,}5\,\mathrm{m}$, $r_1 = 0{,}010\,\mathrm{m}$, $r_2 = 0{,}009\,\mathrm{m}$, $B_0 = 1\,\mathrm{T}, Q = 6 \cdot 10^{-5}$ C, $I = 6 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$.

Przenikalność magnetyczna próżni wynosi $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$.

Zadanie 3.

Płasko - wypukła soczewka o promieniu krzywizny R i grubości (na osi optycznej) d jest wykonana z materiału o współczynniku załamania zmieniającym się z odległością r od jej osi zgodnie ze wzorem

$$n(r) = n_1 + a \cdot r^2,$$

gdzie n_1 i a są stałymi. Współczynnik załamania ośrodka na zewnątrz soczewki wynosi n_0.

a) Rozważmy promień równoległy do osi soczewki, padający na nią od strony płaskiej w odległości r_1 od tej osi. Opisz jakościowo i przedyskutuj dalszy bieg promienia.

b) Wyznacz zdolność skupiająca tej soczewki. Przyjmij, że $\frac{|\Delta r|}{d} \ll 1$, $\frac{|\Delta r|}{r_1} \ll 1$, gdzie Δr jest odległością, o jaką promień równoległy do osi optycznej soczewki, padający na płaską stronę tej soczewki w odległości r_1 od osi oddala się od tej osi w wyniku przejścia przez soczewkę. Rozważ promienie przyosiowe, tzn. przyjmij, że r_1 jest małe.

Uwaga: dla $|x| \ll 1$, w przybliżeniu liniowym mamy

$(1+x)^n \approx 1 + nx$, $\ln(1+x) \approx x$, gdzie n jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Rozwiązanie zadania 1.

Energia wytwarzana w trakcie jednego rozpadu wynosi

$$\varepsilon = \left(m_{^{238}_{94}\mathrm{Pu}} - m_{^{234}_{92}\mathrm{U}} - m_{^{4}_{2}\mathrm{He}} \right) c^2. \tag{1}$$

Zgodnie z prawem rozpadu promieniotwórczego po czasie t z N_0 jąder plutonu pozostaje $N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/t_{1/2}}$. Oznacza to, że na jednostkę czasu rozpada się $n = -\frac{d}{dt}N(t) = N_0 \cdot \frac{\ln 2}{t_{1/2}} 2^{-t/t_{1/2}}$. Przyjmując $t = 0$ otrzymamy

$$n = N_0 \cdot \frac{\ln 2}{t_{1/2}}. \tag{2}$$

Wydzielona energia związana z tymi rozpadami wynosi

$$\begin{aligned} q_1 = n\varepsilon &= \frac{m}{m_{^{238}_{94}\mathrm{Pu}}} \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \varepsilon && (3) \\ &\approx 1136\,\mathrm{W}. && (4) \end{aligned}$$

Chłodnicą w naszym przypadku może być tylko zewnętrzna obudowa sondy. Ilość ciepła w jednostce czasu wypromieniowana przez obudowę wynosi $4\pi R^2 \sigma T_2^4$, gdzie T_2 jest jej temperaturą.

Z drugiej strony, skoro nasz silnik jest silnikiem odwracalnym, ciepło na jednostkę czasu q_2, jakie silnik musi musi oddawać chłodnicy, wynosi

$$q_2 = \frac{T_2}{T_1} q_1. \tag{5}$$

W przypadku a) całe q_1 musi być w końcowym rozrachunku wypromieniowane na zewnątrz, zatem

$$4\pi R^2 \sigma T_2^4 = q_1, \tag{6}$$

co daje w przypadku a)

$$T_2 = \left(\frac{q_1}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{1/4} \approx 283\,\mathrm{K}. \tag{7}$$

W przypadku b) na zewnątrz musi być wypromieniowane tylko ciepło q_2, zatem

$$4\pi R^2 \sigma T_2^4 = q_2. \tag{8}$$

co daje $4\pi R^2 \sigma T_2^4 = \frac{T_2}{T_1} q_1$. Stąd w przypadku b)

$$T_2 = \left(\frac{q_1}{4\pi R^2 \sigma T_1} \right)^{1/3} \approx 234\,\mathrm{K}. \tag{9}$$

Uwzględniając, że

$$P = q_1 - q_2, \tag{10}$$

otrzymamy szukaną moc;
w przypadku a):

$$\begin{aligned} P &= q_1 \left(1 - \frac{1}{T_1} \left(\frac{q_1}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{1/4} \right) && (11) \\ &\approx 494\,\mathrm{W}, && (12) \end{aligned}$$

w przypadku b):

$$P = q_1 \left(1 - \frac{1}{T_1} \left(\frac{q_1}{4\pi R^2 \sigma T_1} \right)^{1/3} \right) \tag{13}$$

$$\approx 605\,\mathrm{W}. \tag{14}$$