

LX OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZEŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.

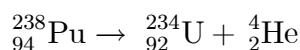
Kulista, doskonale czarna sonda kosmiczna "Lord Darth Vader", wykorzystuje do zasilania promieniotwórczy izotop plutonu ^{238}Pu . Pluton o masie m jest umieszczony wewnątrz sondy w pojemniku, którego ścianki całkowicie pochłaniają produkty rozpadu plutonu. Temperatura pojemnika jest równa T_1 , temperatura pozostałych elementów sondy nie zmienia się w czasie.

Przyjmując, że moc P wykorzystywana do działania sondy, jest wytwarzana przez idealny (odwracalny) silnik cieplny, który pobiera ciepło z pojemnika z plutonem, oblicz, ile wynosi ta moc. Rozważ dwa przypadki:

a) cała praca wytworzona przez rozważany silnik jest wykorzystywana (po przetworzeniu na energię elektryczną) do zasilania komputerów pokładowych;

b) cała praca wytworzona przez rozważany silnik jest wysyłana na zewnątrz sondy (np. w postaci wiązki laserowej).

Czas połowicznego rozpadu ^{238}Pu wynosi $t_{1/2} = 87,7$ lat. Przyjmij, że rozpad zachodzi zgodnie z reakcją



i pomiń inne reakcje jądrowe. Pomiń promieniowanie dochodzące do sondy z zewnątrz. Promień sondy wynosi R .

Wyniki liczbowe podaj dla $m = 2$ kg, $T_1 = 500$ K, $R = 0,5$ m.

Masy atomowe wynoszą $m_{{}_{94}^{238}\text{Pu}} = 238,04955$ u, $m_{{}_{92}^{234}\text{U}} = 234,04095$ u, $m_{{}_2^4\text{He}} = 4,00260$ u, gdzie u = $1,66 \cdot 10^{-27}$ kg.

Stała Stefana-Boltzmanna $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W/(m²K⁴), prędkość światła $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s.

Zadanie 2.

Jednorodna rura o momencie bezwładności I względem jej osi, długości L i promieniach: wewnętrznym r_2 i zewnętrznym r_1 (przy czym $L \gg r_1$) znajduje się w jednorodnym, równoległym do jej osi polu magnety-

cznym o indukcji B_0 . Rura jest wykonana z nieprzewodzącego, niemagnetycznego materiału. Jej powierzchnia zewnętrzna jest równomiernie naładowana ładunkiem o całkowitej wartości Q , a powierzchnia wewnętrzna jest równomiernie naładowana ładunkiem o całkowitej wartości $-Q$. Rura może się swobodnie obracać wokół swojej osi, ale początkowo jest nieruchoma. Znajdź końcową prędkość kątową rury, jeśli wartość indukcji zewnętrznego pola magnetycznego zmniejszono powoli od B_0 do 0.

Podaj wynik liczbowy dla $L = 0,5$ m, $r_1 = 0,010$ m, $r_2 = 0,009$ m, $B_0 = 1$ T, $Q = 6 \cdot 10^{-5}$ C, $I = 6 \cdot 10^{-9}$ kg·m².

Przenikalność magnetyczna próżni wynosi $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

Zadanie 3.

Płasko - wypukła soczewka o promieniu krzywizny R i grubości (na osi optycznej) d jest wykonana z materiału o współczynniku załamania zmieniającym się z odległością r od jej osi zgodnie ze wzorem

$$n(r) = n_1 + a \cdot r^2,$$

gdzie n_1 i a są stałymi. Współczynnik załamania ośrodka na zewnątrz soczewki wynosi n_0 .

a) Rozważmy promień równoległy do osi soczewki, padający na nią od strony płaskiej w odległości r_1 od tej osi. Opisz jakościowo i przedyskutuj dalszy bieg promienia.

b) Wyznacz zdolność skupiającą tej soczewki. Przyjmij, że $\frac{|\Delta r|}{d} \ll 1$, $\frac{|\Delta r|}{r_1} \ll 1$, gdzie Δr jest odległością, o jaką promień równoległy do osi optycznej soczewki, padający na płaską stronę tej soczewki w odległości r_1 od osi oddala się od tej osi w wyniku przejścia przez soczewkę. Rozważ promienie przyosiowe, tzn. przyjmij, że r_1 jest małe.

Uwaga: dla $|x| \ll 1$, w przybliżeniu liniowym mamy

$(1+x)^n \approx 1+nx$, $\ln(1+x) \approx x$, gdzie n jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Rozwiązanie zadania 3.

a) Promień biegnąc wewnątrz soczewki ulegnie odchyleniu 'od' osi optycznej, gdy $a > 0$, a odchyli się 'do' osi optycznej gdy $a < 0$. Na granicy soczewka – ośrodek na zewnątrz soczewki zajdzie zwykłe załamanie promienia – w zależności wartości względnego współczynnika załamania kąt odchylenia 'do' lub 'od' osi optycznej może ulec zmniejszeniu lub zwiększeniu. Może też zajść całkowite wewnętrzne odbicie, jeśli kąt padania będzie większy od kąta granicznego.

b) **I wersja rozwiązania.** Z geometrii wynika, że grubość soczewki x w zależności od odległości y od osi jest równa

$$x(y) = d + \sqrt{R^2 - y^2} - R \quad (24)$$

$$\approx d - \frac{y^2}{2R}. \quad (25)$$

Do wyznaczenia ogniskowej wykorzystamy zasadę Fermata. W tym celu należy wyznaczyć drogę optyczną promienia. Zgodnie z przybliżeniami podanymi w treści zadania, droga optyczna promienia padającego prostopadłe na płaską część soczewki w odległości y od jej osi jest wewnątrz soczewki równa $x(y) \cdot n(y)$. Załóżmy, że promień po przejściu przez krążek, przetnie oś optyczną w odległości f od soczewki. Droga optyczna, jaką on przebędzie od miejsca, gdzie padł na krążek, wynosi

$$l(y) = n_0 \sqrt{[f + d - x(y)]^2 + y^2} + x(y) \cdot n(y). \quad (26)$$

Powyższy wzór jest prawdziwy tylko, gdy $f > 0$; gdy $f < 0$ powinniśmy uwzględnić, że ognisko znajduje się po tej samej stronie soczewki, co padające promienie. Można to uwzględnić pisząc w przypadku $f < 0$

$$l(y) = -n_0 \sqrt{[f + d - x(y)]^2 + y^2} + x(y) \cdot n(y). \quad (27)$$

Obie te sytuacje są automatycznie uwzględnione, jeśli napiszemy

$$l(y) = n_0 f \sqrt{1 + \frac{y^2 + 2[d - x(y)]f + [d - x(y)]^2}{f^2}} + x(y) \cdot n(y). \quad (28)$$

Dla małych y

$$l(y) = n_0 f + n_0 \frac{y^2}{2f} + n_0 \frac{y^2}{2R} + dn_1 - n_1 \frac{y^2}{2R} + da \cdot y^2. \quad (29)$$

Zgodnie z zasadą Fermata, jeśli f jest ogniskową, to $l(y)$ nie powinno zależeć od y , co oznacza

$$\frac{1}{f} = \frac{n_1/n_0 - 1}{R} - \frac{2da}{n_0}. \quad (30)$$

Zauważmy, że dla $a = 0$, mamy do czynienia ze zwykłą soczewką płasko-wypukłą i otrzymujemy zwykły wzór odpowiadający temu przypadkowi. Gdy $a \neq 0$, zmienna gęstość optyczna ośrodka działa jak druga soczewka - gdy $a > 0$ jak soczewka rozpraszająca, gdy $a < 0$ - jak soczewka skupiająca. W szczególności dla odpowiednio dużych a cały układ działa jak soczewka rozpraszająca.

b) **II wersja rozwiązania**

Rozważmy bieg promienia wewnątrz krążka. Z prawa załamania wynika, że wewnątrz soczewki spełnione jest

$$n(r) \cos [\alpha (r)] = n (r_1), \quad (31)$$

gdzie r jest aktualną odległością promienia od osi natomiast $\alpha (r)$ – kątem, jaki tworzy on z osią. Niech x będzie odległością od brzegu krążka, a $y = r - r_1$. Ponieważ $\cos [\alpha (r)] = 1/\sqrt{1 + y' (x)^2}$, mamy

$$n (r_1 + y (x)) = n (r_1) \sqrt{1 + y' (x)^2}. \quad (32)$$

Dla małych $y(x)/r_1$, $y'(x)$, uwzględniając postać zależności $n (r)$ otrzymamy

$$n (r_1) + 2ar_1y(x) = n (r_1) + \frac{1}{2}n (r_1) y' (x)^2. \quad (33)$$

Powyższe równanie ma analogiczną postać jak zasada zachowania energii mechanicznej w rzucie pionowym (gdzie x jest czasem, a y' – prędkością), zatem rozwiązanie jest następujące

$$y (x) = \frac{ar_1}{n (r_1)} x^2, \quad (34)$$

$$y' (x) = \frac{2ar_1}{n (r_1)} x \approx \frac{2ar_1}{n_1} x. \quad (35)$$

Na granicy ośrodków spełnione jest prawo załamania

$$n (r) \sin \theta = n_0 \sin \beta, \quad (36)$$

gdzie θ jest kątem, pod jakim promień pada na granicę soczewka-otaczający ośrodek, β jest kątem załamania. Normalna do granicy soczewka-otaczający ośrodek tworzy z osią optyczną kąt

$$\psi = \arcsin \frac{r}{R} \approx \frac{r}{R} \quad (37)$$

$$\approx \frac{r_1}{R}, \quad (38)$$

zatem mamy

$$\theta = \psi - \alpha (r_1 + y (d)) = \frac{r_1}{R} - y' (d) = \frac{r_1}{R} - \frac{2ar_1}{n_1} d, \quad (39)$$

$$\beta = \gamma + \psi = \frac{r_1}{f} + \frac{r_1}{R} \quad (40)$$

Gdzie $\gamma \approx y_1/f$ jest kątem jaki tworzy z osią optyczną promień po przejściu przez soczewkę. W przybliżeniu zatem (36) przyjmie postać

$$n_1 \cdot \left(\frac{r_1}{R} - \frac{2ar_1}{n_1} d \right) = n_0 \cdot \left(\frac{r_1}{f} + \frac{r_1}{R} \right). \quad (41)$$

Stąd

$$\frac{1}{f} = \frac{n_1/n_0 - 1}{R} - \frac{2ad}{n_0}.$$