LXII OLIMPIADA FIZYCZNA — ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

Rozwiązania zadań I stopnia należy przesyłać do **Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej** w terminach: część I — do 12 października b.r, część II — do 16 listopada b.r.. O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II.
Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć na stronie internetowej http://www.kgof.edu.pl.

Krótka informacja na temat poprawnej redakcji rozwiązań zadań Olimpiady Fizycznej

Zadania powinny być rozwiązane jasno, przejrzyście i czytelnie. Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce papieru. Poszczególne etapy rozumowania należy opisać, a wszelkie zależności fizyczne, które nie są wprost podane w podręcznikach szkolnych – udowodnić. Należy również objaśnić wszelkie oznaczenia występujące w rozwiązaniach zadań. Rysunki mogą być wykonane odręcznie – muszą być jednak przejrzyste i czytelne oraz dobrze opisane w tekście.
Rozumowanie przedstawione w rozwiązaniach nie może zawierać luk logicznych. Każdy krok rozumowania powinien być zwięźle opisany, a przyjęte założenia - klarownie uzasadnione. Rozwlekłość jest uznawana za ujemną cechę pracy.
Rozwiązanie zadania teoretycznego powinno być poprzedzone analizą problemu poruszanego w zadaniu, a zakończone dyskusją wyników. Rozwiązania zadań teoretycznych powinny odnosić się do ogólnej sytuacji opisanej w treści, dane liczbowe (o ile podane) powinny być podstawione dopiero do ostatecznych wzorów.
W zadaniach doświadczalnych należy wyraźnie rozgraniczyć części teoretyczną i doświadczalną. Część teoretyczna zadania doświadczalnego powinna zawierać analizę problemu wraz z wyprowadzeniem niezbędnych wzorów (o ile nie ma ich wprost w podręcznikach szkolnych) oraz sugestię metody doświadczalnej. Część doświadczalna powinna zawierać m.in. opis układu doświadczalnego ilustrowany rysunkiem, opis wykonanych pomiarów, wyniki pomiarów, analizę czynników mogących wpływać na wyniki (jak np. rozpraszanie energii lub opory wewnętrzne mierników), opracowanie wyników wraz z dyskusją niepewności pomiarowych. Wykresy do zadania doświadczalnego powinny być starannie wykonane, najlepiej na papierze milimetrowym. Ocenie podlegają wyłącznie elementy rozwiązania opisane w pracy. W zadaniach doświadczalnych osobno oceniana jest część teoretyczna i część doświadczalna.
W rozwiązaniach można posługiwać się dowolnym układem jednostek, chyba że tekst zadania mówi wyraźnie inaczej.

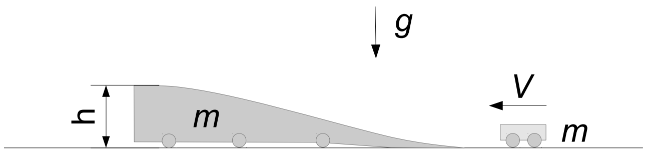
CZĘŚĆ II (termin wysyłania rozwiązań — 16 listopada 2012 r.)

Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres autora pracy, a także nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki. Do pracy należy dołączyć kopertę zaadresowaną do siebie.

ZADANIA TEORETYCZNE

Należy przesłać rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

Zadanie T1



Na poziomej podłodze znajdują się mały wózek o masie m oraz duża, początkowo spoczywająca pochylnia o takiej samej masie m i wysokości h (patrz rysunek).

a) Jaką prędkość v_0 należy nadać wózkowi, aby wtoczył się na górną, poziomą część pochylni i zatrzymał względem niej?

b) Zakładając, że wózkowi nadano prędkość $v > v_0$, wyznacz odległość d między nim a pochylnią w chwili uderzenia o podłogę.

Pomiń tarcie, opór powietrza oraz momenty bezwładności kółek wózka i pochylni. Wózek w trakcie wtaczania nie odrywa się od powierzchni pochylni.

Zadanie T2

W morzu, na głębokości h spoczywa wrak okrętu o masie m i średniej gęstości ρ. Postanowiono go wydobyć, przymocowując do niego, a następnie nadmuchując powietrzem specjalne balony. Wyznacz minimalną pracę, jaka należy wykonać, by nadmuchać te balony przy założeniu, że nadmuchiwane powietrze nie wymienia ciepła z otoczeniem.
Podaj wartość liczbową tej pracy dla $h = 100$ m, $m = 2000$ t, $\rho = 3{,}0$ g/cm^3.
Gęstość wody wynosi $\rho_w = 1{,}0$ g/cm^3, ciśnienie atmosferyczne tuż nad powierzchnią morza (skąd jest pobierane powietrze do nadmuchiwania balonów) – $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa. Wrak leży na dnie nie będąc w nim zakopany ani też przyssany do niego. Balony znajdują się na głębokości wraku. Pomiń masę powłok balonów oraz gęstość powietrza (również sprężonego) w porównaniu z gęstością wody. Molowe ciepło właściwe powietrza przy stałej objętości wynosi $C_V = 21$ J/(K $\cdot$ mol), przyspieszenie grawitacyjne – $g = 9{,}8$ m/s^2, uniwersalna stała gazowa – $R = 8{,}3$ J/(K $\cdot$ mol).

Dla przemiany adiabatycznej zachodzi związek $pV^{\frac{C_V+R}{C_V}} = \text{const.}$

Zadanie T3

Wewnątrz równomiernie naładowanej ładunkiem Q (gdzie $Q < 0$) sfery o promieniu R znajduje się równomiernie naładowana sfera o potencjale równym potencjałowi w nieskończoności i promieniu $R/2$. Obie sfery są współśrodkowe.
Z wewnętrznej sfery, stycznie do niej, wylatuje elektron (o ładunku $e < 0$). Jaka jest minimalna wartość początkowej energii kinetycznej elektronu E_0, przy której dotrze on do zewnętrznej sfery?

Przyjmij, że elektron porusza się z prędkością nierelatywistyczną.

Zadanie T4. NUMERYCZNE

Pozioma tarcza obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół pionowej osi. W odległości R od osi obrotu kładziemy na tarczy mały klocek o masie m, który w chwili początkowej nie porusza się względem układu inercjalnego, a ślizga się względem tarczy. Tarcie między klockiem a tarczą powoduje, że klocek zaczyna się poruszać. Możliwe są dwa przypadki:

a) po pewnym czasie klocek przestaje się ślizgać względem tarczy,

b) klocek stale ślizga się względem tarczy, oddalając się coraz bardziej od jej środka.

Wyznacz numerycznie przybliżoną wartość parametru $p = \frac{\mu g}{\omega^2 R}$ (gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim, a μ – współczynnikiem tarcia) będącą graniczną wartością między przypadkiem a) oraz b).

Wykonaj wykresy toru klocka dla p mniejszego o 0,1 od wartości granicznej oraz większego o 0,1 od tej wartości.

Wskazówka:

Ruch układu można wyznaczyć numerycznie np. korzystając z różnicowej postaci równań ruchu:

$$\begin{aligned} x(t+\Delta t) &= x(t) + v_x(t)\,\Delta t, \\ y(t+\Delta t) &= y(t) + v_y(t)\,\Delta t, \\ v_x(t+\Delta t) &= v_x(t) + \frac{F_x(t)}{m}\Delta t, \\ v_y(t+\Delta t) &= v_y(t) + \frac{F_y(t)}{m}\Delta t. \end{aligned}$$

Uwaga:

Rozwiązanie powinno być napisane na papierze i zawierać opis sposobu rozwiązania oraz wyniki i wykresy. Nie jest konieczne załączanie kodu programu lub arkusza kalkulacyjnego.

Dodatkowe informacje na temat zadań numerycznych można znaleźć w zadaniach numerycznych z poprzednich olimpiad oraz w rozwiązaniach tych zadań.

Rozwiązanie zadania numerycznego

Niezbędne wzory i rozważania wstępne

Gdy klocek ślizga sie względem tarczy, siła tarcia ma stałą wartość równą $mg\mu$ i jest skierowana przeciwnie do prędkości klocka względem punktu tarczy, nad którym znajduje się klocek w danej chwili. Oznacza to, że

$$\vec{F} = mg\mu \frac{\vec{V} - \vec{v}}{\left|\vec{V} - \vec{v}\right|}, \tag{27}$$

gdzie $\vec{v}$ jest prędkością klocka w danej chwili, natomiast $\vec{V}$ jest prędkością tarczy w punkcie, w którym znajduje sie klocek. Wybierając początek układu współrzędnych w środku tarczy i oznaczając współrzędne klocka w układzie nieobracającym się przez $(x,\ y)$ mamy

$$\vec{V} = (V_x,\ V_y) = (\omega y,\ \ -\omega x)\,. \tag{28}$$

Zatem równania Newtona dla ruchu klocka przyjmą postać

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \mu g \frac{\omega y - v_x}{\sqrt{(\omega y - v_x)^2 + (-\omega x - v_y)^2}}, \tag{29}$$

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \mu g \frac{-\omega x - v_y}{\sqrt{(\omega y - v_x)^2 + (-\omega x - v_y)^2}}. \tag{30}$$

Te równania można rozwiązywać numerycznie korzystając ze wzorów przedstawionych w treści zadania.

Zauważmy, że gdy klocek spoczywa na obracającej się tarczy, to przyspieszenie musi być mniejsze lub równe maksymalnemu przyspieszeniu spowodowanemu tarciem

$$\omega^2 r \leq \mu g.$$

Oznacza to, że jeśli w jakimkolwiek momencie ruchu zajdzie

$$\frac{\mu g}{\omega^2 r} < 1, \tag{31}$$

czyli

$$r > \frac{\mu g}{\omega^2}, \tag{32}$$

to klocek na pewno w dalszej części ruchu nie zatrzyma się względem tarczy. Oznacza to również, że nie ma sensu szukanie granicznej wartości p dla $p < 1$.

Poniżej omówiono rozwiązanie wykorzystujące arkusz kalkulacyjny. Oczywiście wykorzystanie innych narzędzi do obliczeń numerycznych jest dopuszczalne.

Opis algorytmu i jego implementacji

W pierwszych wierszach arkusza do odpowiednio opisanych komórek wprowadzono wartości odpowiadające stałym g, μ oraz ω. Do tych komórek odwołują się wzory w komórkach odpowiadających F_x/m oraz F_y/m. Jedna z komórek odpowiada również początkowej odległości klocka od osi obrotu R.

W wierszu poniżej, w kolejnych komórkach wpisano nagłówki kolumn – nazwy określające dane, które będą znajdowały się w poszczególnych kolumnach: t, dt, v_x, v_y, V_x, V_y, $V_x - v_x$, $V_y - v_y$, $|V - v|$, F_x/m, F_y/m, x, y, r (nie wszystkie one są niezbędne do rozwiązania zadania). Oznaczając indeksem n (począwszy od 1) formuły w komórkach w wierszu n poniżej wiersza mamy (dla przejrzystości stosowana jest notacja matematyczna, będąca odpowiednikiem formuł wpisanych do arkusza)

Wiersz pierwszy (zerowy krok algorytmu):

$t_1 = 0$ $\quad dt_1 = 0,005$

$v_{x1} = 0$ $\quad v_{y1} = 0$

$V_{x1} = \omega y_1$ $\quad V_{y1} = -\omega x_1$

$(V_x - v_x)_1 = V_{x1} - v_{x1}$ $\quad (V_y - v_y)_1 = V_{y1} - v_{y1}$

$|V - v|_1 = \sqrt{(V_x - v_x)_1^2) + (V_y - v_y)_1^2}$

$(F_x/m)_1 = \mu g \cdot (V_x - v_x)_1/|V - v|_1$ $\quad (F_y/m)_1 = \mu g \cdot (V_y - v_y)_1/\left|V - v\right|_1$

$x_1 = 0$ $\quad y_1 = R$

$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ $\quad \left(\mu g/\left(\omega^2 r\right)\right)_1 = \mu g/\left(\omega^2 r_1\right)$

Wiersz n+1 (n – ty krok algorytmu):

$t_{n+1} = t_n + dt_n$ $\quad dt_{n+1} = dt_n$

$v_{xn+1} = v_{xn} + (F_x/m)_n \cdot dt_n$ $\quad v_{yn+1} = v_{yn} + (F_y/m)_n \cdot dt_n$

$V_{xn+1} = \omega y_{n+1}$ $\quad V_{yn+1} = -\omega x_{n+1}$

$(V_x - v_x)_{n+1} = V_{xn+1} - v_{xn+1}$ $\quad (V_y - v_y)_{n+1} = V_{yn+1} - v_{yn+1}$

$|V - v|_{n+1} = \sqrt{(V_x - v_x)_{n+1}^2 + (V_y - v_y)_{n+1}^2}$

$(F_x/m)_{n+1} = \mu g \cdot (V_x - v_x)_{n+1}/|V - v|_{n+1}$ $\quad (F_y/m)_{n+1} = \mu g \cdot (V_y - v_y)_{n+1}/|V - v|_{n+1}$

$x_{n+1} = x_n + v_{xn} \cdot dt_n$ $\quad y_{n+1} = y_n + v_{yn} \cdot dt_n$

$r_{n+1} = \sqrt{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2}$ $\quad \left(\mu g/\left(\omega^2 r\right)\right)_{n+1} = \mu g/\left(\omega^2 r_{n+1}\right)$

Aby móc ocenić dokładność obliczeń numerycznych, zawartość tak utworzonego arkusza skopiowano do drugiego arkusza w ramach tego samego skoroszytu (tego samego pliku), a następnie skopiowano tak ostatni wiersz, by w drugim arkuszu było dwa razy więcej kroków algorytmu, niż w pierwszym.

W trzecim arkuszu (w tym samym skoroszycie) utworzono wykres przedstawiający tor wyznaczony przez kolumny x oraz y z pierwszego arkusza oraz tor wyznaczony przez kolumny x oraz y z drugiego arkusza. W drugim arkuszu przyjęto wartość dt dwa razy mniejszą, niż wartość dt w pierwszym arkuszu.

Dodatkowo w drugim arkuszu umieszczono dane pozwalające na narysowanie okręgu o promieniu $r_{gr} = \mu g/\omega^2$ i umieszczono wykres tego okręgu (nazywanego dalej okręgiem granicznym) na wspólnym wykresie torów z arkusza pierwszego i drugiego.

Opis wykorzystania algorytmu do wyznaczenia granicznej wartości p

W obliczeniach długości wyrażono jako wielokrotności początkowej odległości od osi obrotu, zaś czas jako wielokrotności $1/\omega$. Odpowiada to przyjęciu $R = 1$ oraz $\omega = 1$. W obliczeniach zmieniano wartości μg wyrażone w zdefiniowanych powyżej jednostkach długości i czasu. Oczywiście możliwy jest inny wybór jednostek, w których prowadzone są obliczenia.

Początkowo w pierwszym arkuszu znajdowało się 5000 opisanych powyżej wierszy (kroków) a wartość kroku czasowego dt w tym arkuszu wynosiła $0,005$ (patrz uwaga o jednostkach powyżej), natomiast w drugim arkuszu znajdowało się 10000 wierszy (kroków) a wartość kroku czasowego dt wynosiła $0,0025$. W dalszych rozważaniach w obu arkuszach wartości wszystkich pozostałych parametrów (prócz dt) przyjmowano zawsze takie same, zatem można oczekiwać, że oba tory będą takie same.

Po wstępnej analizie wykresów otrzymanych dla μg w przedziale od 1,0 do 1,4 stwierdzono konieczność zmniejszenia kroku czasowego, gdyż wykresy z pierwszego arkusza oraz z drugiego arkusza znacznie się różniły.

Ostatecznie przyjęto w pierwszym arkuszu wartość kroku czasowego dt równą 0,001 zwiększając liczbę wierszy (kroków) do 10000, natomiast w drugim arkuszu $dt = 0{,}005$, a liczba wierszy (kroków) wynosiła 20000. Zmodyfikowano przy tym odpowiednio zakresy komórek, do których odwołują się wykresy.

Analizując tory dla różnych μg stwierdzono, że dla $\mu g \leq 1{,}14$ (a tym samym $p \leq 1{,}14$) mamy do czynienia z przypadkiem b) z treści zadania (patrz Wykres 1 odpowiadający $p = 1{,}14$), natomiast dla $\mu g \geq 1{,}15$ (a tym samym $p \geq 1{,}15$) – z przypadkiem a) z treści zadania (patrz Wykres 2 odpowiadający $p = 1{,}14$).

Na tej podstawie przyjęto, że graniczna wartość p wynosi $p_{\mathrm{gr}} = 1{,}145 \pm 0,005$.

Wykresy 3 oraz 4 przedstawiają wymagane w treści zadania wykresy dla $p = 1{,}045$ oraz $p = 1{,}245$.

Dyskusja

Na wykresie 1 łatwo można zauważyć rozbieżność między torami opowiadającymi *dt większe* (arkusz 1) oraz *dt mniejsze* (arkusz 2), co pozornie sugeruje konieczność dalszego zmniejszenia kroku czasowego. Zauważmy jednak, że do miejsca, gdzie tory przekraczają okrąg graniczny, są one (wizualnie) nieodróżnialne. Ponieważ to przekroczenie okręgu granicznego decyduje o tym, czy mamy do czynienia z przypadkiem a) czy b), przyjęcie, że dla $p = 1{,}14$ mamy do czynienia z przypadkiem b) jest uzasadnione.

Zauważmy, że wzór (27) nie obowiązuje w przypadku, gdy klocek spoczywa względem tarczy. Zastosowanie go oznacza, że w naszym przybliżeniu klocek nigdy się nie zatrzyma względem tarczy – może wykonywać chaotyczne drgania wokół ustalonego punktu na tarczy. Taka sytuacja oznacza, że nasze rozwiązanie może być niestabilne numerycznie dla bardzo długich czasów. Rzeczywiście analiza wartości komórek $\left|\vec{V} - \vec{v}\right|$ w arkuszu kalkulacyjnym w przypadku $p = 1{,}5$ pozwala stwierdzić, że $\left|\vec{V} - \vec{v}\right| / (\omega r)$ osiąga w pewnym momencie wartość poniżej 10^{-4}, następnie wzrasta, a potem znowu maleje. Tak mała wartość $\left|\vec{V} - \vec{v}\right| / (\omega r)$ oznacza, że w rzeczywistości klocek przestał się ślizgać względem tarczy. Ponieważ w tym momencie spełniony jest warunek $\mu g > \omega^2 r$ (bo tor znajduje się wewnątrz okręgu granicznego), zatem dla $p = 1{,}5$ rzeczywiście mamy do czynienia z przypadkiem a). Podobna sytuacja występuje dla $p = 1{,}245$ (wykres 4).

Punktacja zadania numerycznego

Siła działająca na klocek (wzory (27) oraz (28)) – 2 pkt.

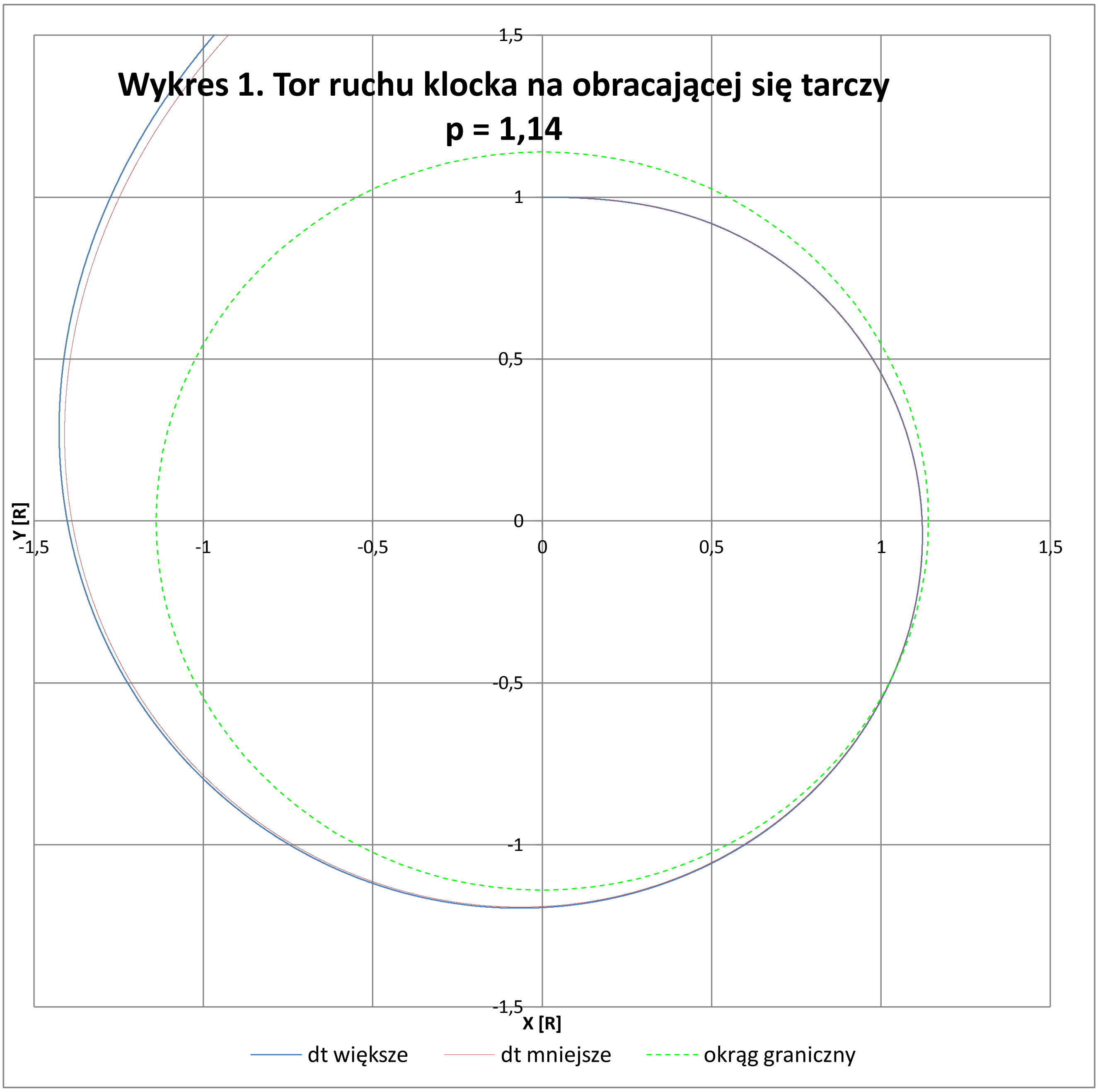
Opis algorytmu i jego implementacji – 2 pkt.

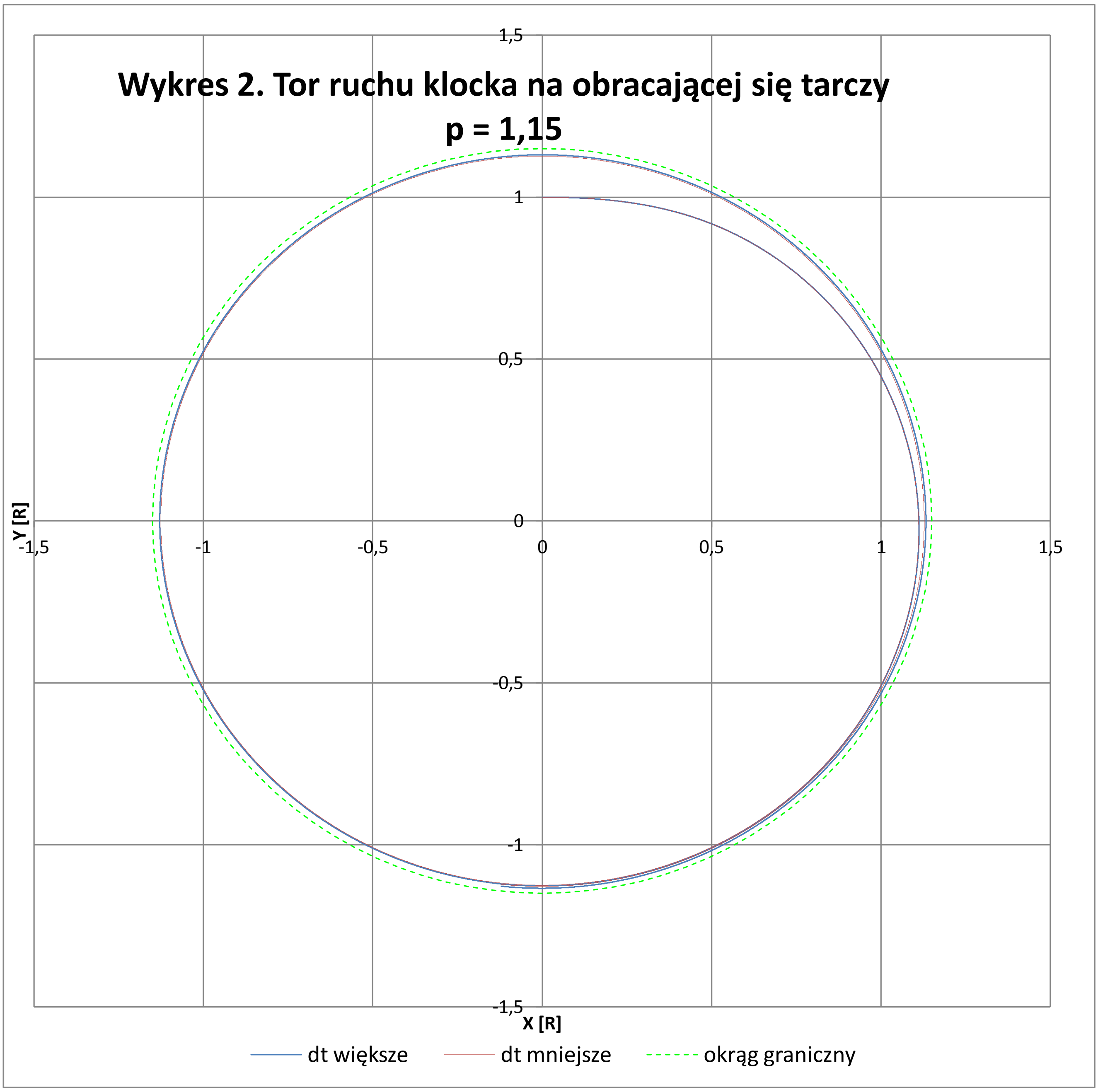
Opis wykorzystania algorytmu do wyznaczenia p_{gr} – 2 pkt.

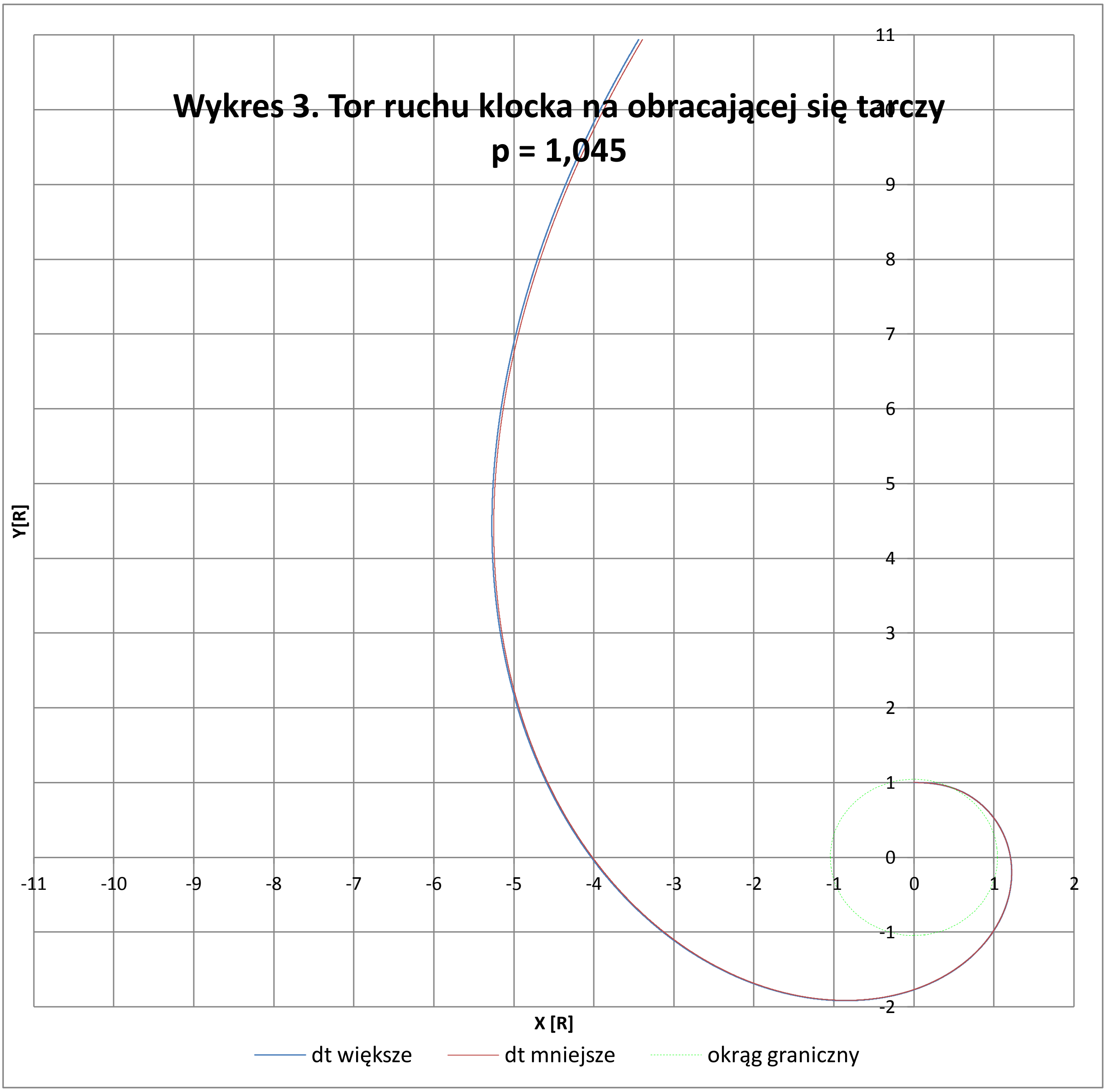
Wartość graniczna p w zakresie od 1,1 do 1,2 – 1 pkt.

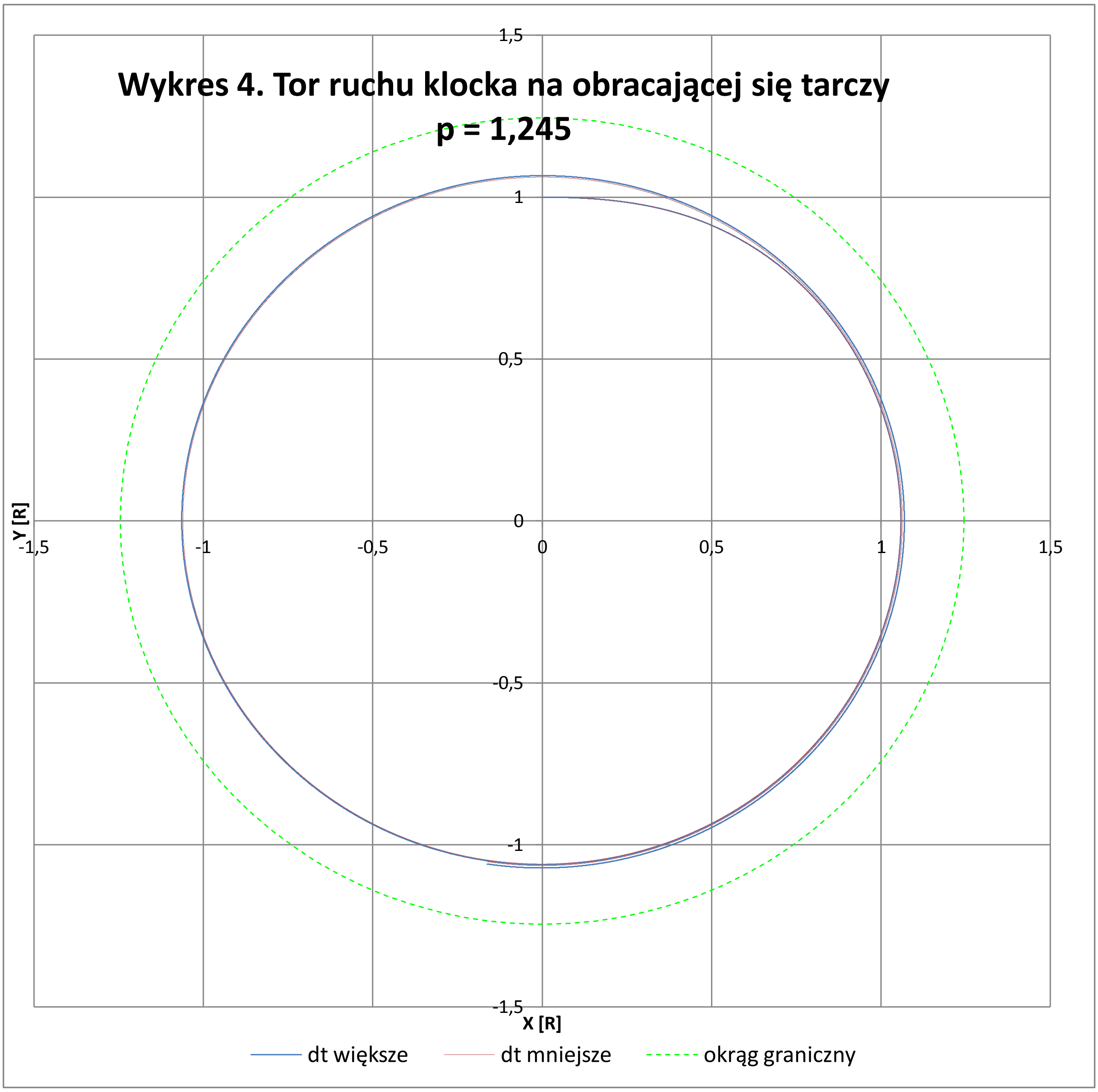
Wartość graniczna p w zakresie od 1,135 do 1,155 – 1 pkt.

Wykresy dla $p = (p_{\mathrm{gr}} - 0{,}1)$ oraz $p = (p_{\mathrm{gr}} + 0{,}1)$ – 2 pkt.


Wykres 1. Tor ruchu klocka na obracającej się tarczy
p = 1,14
Y [R]
X [R]
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
dt większe
dt mniejsze
okrąg graniczny


Wykres 2. Tor ruchu klocka na obracającej się tarczy
p = 1,15
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
Y [R]
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
X [R]
dt większe
dt mniejsze
okrąg graniczny


Wykres 3. Tor ruchu klocka na obracającej się tarczy
p = 1,045
Y[R]
X [R]
-11
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
11
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
dt większe
dt mniejsze
okrąg graniczny


Wykres 4. Tor ruchu klocka na obracającej się tarczy
p = 1,245
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
Y [R]
X [R]
dt większe
dt mniejsze
okrąg graniczny