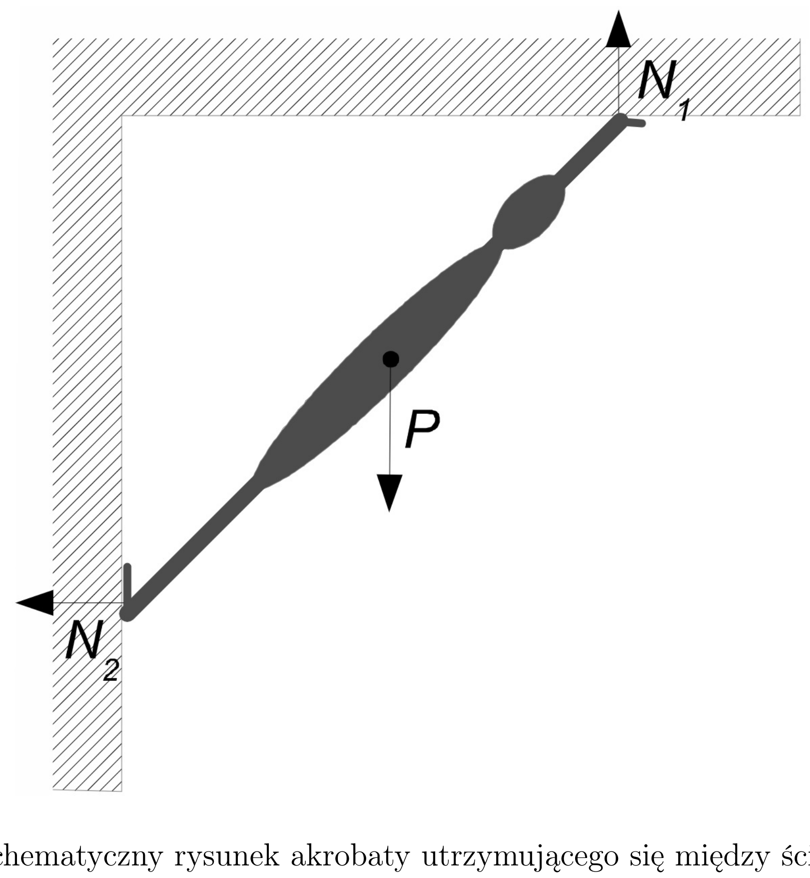
LXIII OLIMPIADA FIZYCZNA

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Źródła:
– Komitet Główny Olimpiady Fizycznej.

Zadanie T1

Pewien akrobata potrafi utrzymać się dotykając rękoma sufitu, a nogami ściany, przy czym kąt, jaki tworzy on z pionem, wynosi 45°. Współczynniki tarcia rąk o sufit oraz nóg o ścianę są sobie równe i wynoszą μ. Wyznacz minimalną siłę N_2, z jaką akrobata musi naciskać na ścianę (składową prostopadłą do ściany), oraz odpowiadającą jej siłę N_1, z jaką musi on naciskać na sufit (składową prostopadłą do sufitu).

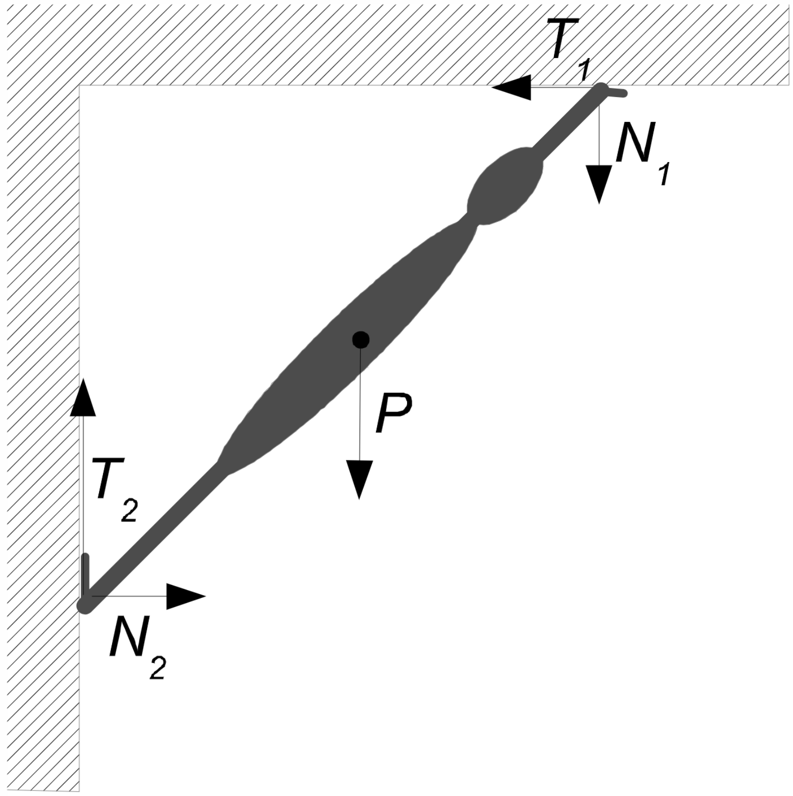


Rysunek 1: Schematyczny rysunek akrobaty utrzymującego się między ścianą a sufitem.

Sufit jest poziomy, a ściana — pionowa. Akrobata nie jest zgięty, jego ciężar wynosi P, a środek masy znajduje się dokładnie w połowie odległości między dłońmi a stopami.

Rozwiązanie zadania T1

Niech siła tarcia rąk o sufit wynosi T_1, siła tarcia stóp o ścianę — T_2. Warunki równowagi są następujące (patrz Rys. 2 – zaznaczono na nim siły działające na akrobatę):



Rysunek 2: Siły działające na akrobatę.

W pionie:

$$P = T_2 - N_1, \tag{1}$$

w poziomie:

$$T_1 = N_2, \tag{2}$$

równowaga momentów sił:

$$(T_2 + N_1)\frac{l}{2\sqrt{2}} = (T_1 + N_2)\frac{l}{2\sqrt{2}}, \tag{3}$$

gdzie l jest długością akrobaty od dłoni do stóp.

Ponieważ siły nacisku nie mogą być ujemne, a $P > 0$, z pierwszych dwóch równań wynika, że również:

$$T_1 \geq 0, \quad T_2 \geq 0. \tag{4}$$

Dodatkowo muszą być spełnione warunki wynikające z definicji współczynnika tarcia:

$$T_1 \leq \mu N_1, \tag{5}$$

$$T_2 \leq \mu N_2. \tag{6}$$

Oczekujemy, że minimalne N_2 odpowiada skrajnemu przypadkowi, tzn. $T_1 = \mu N_1$ lub $T_2 = \mu N_2$. Odpowiada to oczekiwaniu, że zwiększenie μ powoduje zmniejszenie minimalnego N_2. Przyjmiemy takie założenie i sprawdzimy je na podstawie końcowych wyników.

Przypadek 1: zakładamy $T_2 = \mu N_2$
Otrzymujemy:

$$N_2 = \frac{P}{2(\mu - 1)}, \tag{7}$$

$$T_1 = N_2, \tag{8}$$

$$N_1 = \frac{2 - \mu}{2(\mu - 1)} P, \tag{9}$$

$$T_2 = \frac{\mu P}{2(\mu - 1)}. \tag{10}$$

Warunek $0 \leq T_1 \leq \mu N_1$ daje:

$$0 \leq \frac{P}{2(\mu - 1)} \leq \frac{\mu}{2(\mu - 1)}(2 - \mu)\, P. \tag{11}$$

To prowadzi do:

$$\mu - 1 > 0, \qquad 1 \leq \mu(2 - \mu). \tag{12}$$

Drugi warunek nigdy nie może być spełniony (maksimum $\mu(2 - \mu) = 1$ jest dla $\mu = 1$). Zatem **ten przypadek jest niemożliwy**.
Przypadek 2: zakładamy $T_1 = \mu N_1$
Otrzymujemy:

$$N_1 = \frac{P}{2(\mu - 1)}, \tag{13}$$

$$T_1 = \frac{\mu P}{2(\mu - 1)} = N_2, \tag{14}$$

$$T_2 = \frac{2\mu - 1}{2(\mu - 1)} P. \tag{15}$$

Warunek $0 \leq T_2 \leq \mu N_2$ daje:

$$0 \leq 2\mu - 1 \leq \mu^2, \tag{16}$$

co jest spełnione dla każdego $\mu > 1$.
Ponadto:

$$N_2 = \frac{\mu P}{2(\mu - 1)} = \frac{P}{2}\left(1 + \frac{1}{\mu - 1}\right), \tag{17}$$

co maleje wraz ze wzrostem μ, więc założenie było poprawne.
Ostatecznie:

$$N_1 = \frac{P}{2(\mu - 1)}, \tag{18}$$

$$N_2 = \frac{\mu P}{2(\mu - 1)}. \tag{19}$$

Aby sytuacja z zadania była możliwa, musi zachodzić:

$$\mu > 1. \tag{20}$$

Punktacja

Warunki równowagi sił i momentów sił (równania (3) lub równoważne) .... 3 pkt.
Przyjęcie, że minimalne N_2 odpowiada jednemu ze skrajnych przypadków $T_1 = \mu N_1$
lub $T_2 = \mu N_2$ (nie przyznaje się punktu za żądanie spełnienia obu jednocześnie) .... 1 pkt.
Obliczenie sił nacisku dla założenia $T_2 = \mu N_2$ (równania (10))
lub argumentacja odrzucająca ten przypadek .... 2 pkt.
Obliczenie sił nacisku dla założenia $T_1 = \mu N_1$ (równania (15)) .... 2 pkt.
Wybór właściwego rozwiązania z uzasadnieniem (równania (19)) .... 2 pkt.