LXIII OLIMPIADA FIZYCZNA

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Źródła:
– Komitet Główny Olimpiady Fizycznej.

Zadanie T2

Solenoid bez rdzenia ma N zwojów drutu o zerowym oporze nawiniętych na powierzchnię walcową o promieniu r i wysokości l, przy czym

$$\frac{l}{N} \ll r \ll l. \tag{1}$$

Końce drutu są zwarte, a w chwili początkowej natężenie prądu w obwodzie było równe I. Rozważ wymienione poniżej, niezależne od siebie sytuacje. W punktach 1 i 2 przyjmij, że drut jest wiotki.

1. Jednakowo na całej długości spłaszczono solenoid (zdeformowano jego przekrój), tak że powierzchnia przekroju zmalała dwukrotnie.

(a) Oblicz końcowe natężenie prądu w obwodzie.

(b) Oblicz pracę mechaniczną wykonaną podczas tego spłaszczenia solenoidu.

2. Solenoid równomiernie rozciągnięto do długości $2l$ (przy czym obowiązuje warunek $\frac{2l}{N} \ll r$).

(a) Oblicz końcowe natężenie prądu w obwodzie.

(b) Oblicz pracę mechaniczna wykonaną podczas tego rozciągania.

3. Przyjmijmy, że rozważany solenoid jest sprężyną o stałej sprężystości k. Wyznacz długość swobodną l_0 tej sprężyny wiedząc, że gdy płynie przez nią prąd o natężeniu I i nie działają żadne siły zewnętrzne, to ma ona długość l. Przyjmij, że gęstość zwojów przy ściskaniu i rozciąganiu pozostaje jednorodna.

Rozwiązanie zadania T2

Zgodnie z prawem Faradaya siła elektromotoryczna indukowana w obwodzie wynosi

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{2}$$

gdzie Φ jest strumieniem pola B. Jeśli opór drutu jest bardzo mały, to ta siła elektromotoryczna spowoduje przepływ bardzo dużego prądu. Taki prąd będzie wytwarzał pole magnetyczne przeciwstawiające się zmianie Φ. W granicy oporu dążącego do zera wytworzone pole magnetyczne może być dowolnie duże, czyli w tej granicy strumień pola B przechodzący przez powierzchnię ograniczoną drutem nie może się zmieniać.

Zatem przy opisywanych w zadaniu deformacjach solenoidu natężenie prądu zmieni się tak, by strumień pozostał stały.

Z prawa Ampère'a wynika, że wewnątrz solenoidu (ponieważ jest to standardowy wzór szkolny, nie przedstawiamy jego wyprowadzenia)

$$B = \mu_0 \frac{IN}{l}, \tag{3}$$

gdzie μ_0 jest przenikalnością magnetyczną próżni.

To pole jest równoległe do solenoidu, a jego wartość jest taka sama w każdym punkcie przekroju i nie zależy od kształtu tego przekroju.

Mamy zatem

$$\Phi = BS, \tag{4}$$

gdzie S jest polem przekroju poprzecznego solenoidu.

Punkt 1a)

Ponieważ S zmalało dwukrotnie, a $\Phi = \mathrm{const}$, zatem indukcja B musiała dwukrotnie wzrosnąć.

Ze wzoru (3) wynika, że natężenie prądu również wzrosło dwukrotnie.

Punkt 1b)

Początkowa energia pola magnetycznego wynosiła

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot \pi r^2 l, \tag{5}$$

(gęstość energii pola pomnożona przez objętość zawartą wewnątrz solenoidu; można również oprzeć się na wzorze $E_m = \frac{1}{2} L I^2$).

Dwukrotny wzrost B oznacza czterokrotny wzrost gęstości energii, a po pomnożeniu przez dwukrotnie mniejszą objętość otrzymujemy podwojenie energii pola.

Wykonana praca jest więc równa początkowej energii:

$$W = E_m = \frac{\mu_0 \pi}{2l} N^2 r^2 I^2. \tag{6}$$

Punkt 2a)

Warunek

$$\frac{2l}{N} \ll r \tag{7}$$

oznacza, że wydłużenie solenoidu nie pociągnie za sobą zmniejszenia r.

Skoro $\Phi = \mathrm{const}$, to również $B = \mathrm{const}$.

Ze wzoru (3) wnioskujemy, że tym razem również nastąpi dwukrotny wzrost natężenia prądu.

Punkt 2b)

Wykonana praca jest równa różnicy końcowej i początkowej energii pola magnetycznego:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\mu_0 \pi}{2} \cdot \frac{2l}{N^2 r^2} (2I)^2 - \frac{\mu_0 \pi}{2l} N^2 r^2 I^2 \\ &= \frac{\mu_0 \pi}{2l} N^2 r^2 I^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Jest to taki sam wynik jak w punkcie 1b).

Punkt 3

Zgodnie z punktem 2 energia pola magnetycznego sprężyny o długości l_x wynosi

$$E_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot \pi r^2 l_x, \tag{9}$$

przy czym $B = \mu_0 \frac{IN}{l}$ jest stałe.

Całkowita energia wynosi:

$$E_c = E_m + \frac{1}{2}k(l_x - l_0)^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \pi r^2 l_x + \frac{1}{2}k(l_x - l_0)^2. \tag{10}$$

Jest minimalna w stanie równowagi, czyli dla $l_x = l$.

Korzystając ze wzoru na minimum funkcji kwadratowej otrzymujemy:

$$l = l_0 - \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2\mu_0} B^2 \pi r^2\right). \tag{11}$$

Stąd

$$l_0 = l + \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2\mu_0} B^2 \pi r^2 = l + \frac{1}{k} \cdot \frac{\mu_0}{2} \frac{N^2}{l^2} \pi r^2 I^2. \tag{12}$$

Przepływ prądu powoduje więc takie skrócenie sprężyny, jakby działała na nią siła ściskająca

$$F = \frac{\mu_0}{2} \frac{N^2}{l^2} \pi r^2 I^2. \tag{13}$$

Punktacja

Warunek $\Phi = \text{const}$ wraz z uzasadnieniem .... 2 pkt.
Wzory (3) oraz (4) .... 1 pkt.
Dwukrotny wzrost natężenia prądu w przypadku 1 .... 1 pkt.
Wykonana praca w przypadku 1 — wzór (6) .... 1 pkt.
Dwukrotny wzrost natężenia prądu w przypadku 2 .... 1 pkt.
Wykonana praca w przypadku 2 — wzór (8) .... 1 pkt.
Energia całkowita w przypadku 3 — wzór (10) .... 1 pkt.
Długość swobodna sprężyny — wzór (12) .... 2 pkt.