LXIII OLIMPIADA FIZYCZNA

ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Źródła:
– Komitet Główny Olimpiady Fizycznej.

Zadanie T3

Stwierdzono, że temperatura wyłączonego czajnika elektrycznego, wypełnionego pewną ustaloną ilością wody, zmienia się w czasie zgodnie ze wzorem:

$$T(t) = (T_P - T_O)e^{-\alpha t} + T_O, \tag{1}$$

gdzie T_P jest temperaturą w chwili $t = 0$, T_O — temperaturą otoczenia, α — stałą, natomiast e — podstawą logarytmów naturalnych ($e \approx 2{,}718$).

Gdy włączono czajnik, okazało się, że energia elektryczna potrzebna do osiągnięcia przez czajnik temperatury T_K, począwszy od temperatury otoczenia T_O, wynosiła E_1. Moc grzałki w tym przypadku wynosiła P_1.

W wyniku zmiany napięcia zasilającego moc grzałki spadła do P_2. Ile wynosi w tej sytuacji energia elektryczna potrzebna do osiągnięcia przez czajnik temperatury T_K, począwszy od temperatury otoczenia T_O?

Podaj wyniki liczbowe dla: $T_O = 20°\mathrm{C}, T_K = 100°\mathrm{C}, P_1 = 500$ W, $E_1 = 250000$ J, $\alpha = 0{,}001$ s^{-1}, oraz dwóch wartości mocy:a) $P_2 = 300$ W, b) $P_2 = 200$ W.

Przyjmij, że pojemność cieplna czajnika z wodą, czyli ilość ciepła potrzebna do zmiany jego temperatury o jeden stopień, jest stała, a w danej chwili każda część czajnika oraz woda mają taką samą temperaturę. Grzałka jest umieszczona wewnątrz czajnika tak, że cała dostarczona do niej energia jest przekazywana czajnikowi i wodzie. Ilość wody jest taka sama we wszystkich rozważanych sytuacjach.

Uwaga: dla małych x zachodzi przybliżenie

$$e^x \approx 1 + x. \tag{2}$$

Rozwiązanie zadania T3

Gdy grzałka jest wyłączona, zmiana temperatury czajnika od chwili t do chwili $t + \Delta t$ jest dla małych Δt równa

$$\begin{aligned}\Delta T &= (T_P - T_O)e^{-\alpha t - \alpha\Delta t} - (T_P - T_O)e^{-\alpha t} \\ &= \left(e^{-\alpha\Delta t} - 1\right)(T_P - T_O)e^{-\alpha t} = -\alpha\Delta t\,(T_P - T_O)e^{-\alpha t}.\end{aligned} \tag{3}$$

Oznacza to, że szybkość, z jaką czajnik o temperaturze T oddaje ciepło otoczeniu (lub pobiera, jeśli $T < T_O$), wynosi

$$C\,\frac{\Delta T}{\Delta t} = -C\alpha(T_P - T_O)e^{-\alpha t} = -C\alpha(T - T_O), \tag{4}$$

gdzie C jest pojemnością cieplną czajnika z wodą.

Gdy jest włączona grzałka o mocy P, szybkość dopływu energii do czajnika o temperaturze T wynosi w sumie

$$-C\alpha(T - T_O) + P, \tag{5}$$

zatem równanie na szybkość zmian temperatury czajnika przyjmie postać

$$C\,\frac{\Delta T}{\Delta t} = -C\alpha(T - T_O) + P. \tag{6}$$

Z matematycznego punktu widzenia jest to takie samo równanie, jak

$$C\,\frac{\Delta T}{\Delta t} = -C\alpha(T - T_O), \tag{7}$$

pod warunkiem zamiany stałej T_O na

$$T_O + \frac{P}{\alpha C}. \tag{8}$$

Zatem gdy grzałka jest włączona, zależność temperatury czajnika z wodą od czasu jest opisana wzorem

$$T(t) = \left(T_P - T_O - \frac{P}{\alpha C}\right) e^{-\alpha t} + T_O + \frac{P}{\alpha C}. \tag{9}$$

W przypadku $T_P = T_O$ ten wzór sprowadza się do

$$T(t) = -\frac{P}{\alpha C} e^{-\alpha t} + T_O + \frac{P}{\alpha C}. \tag{10}$$

Jeśli grzałka oddała energię E_1, to czas jej pracy wynosił $t_1 = E_1/P_1$, co daje następujący związek między E_1 i T_K:

$$T_K = -\frac{P_1}{\alpha C} \exp\left(-\alpha \frac{E_1}{P_1}\right) + T_O + \frac{P_1}{\alpha C}. \tag{11}$$

Stąd możemy wyznaczyć C:

$$C = \frac{1 - \exp(-\alpha E_1/P_1)}{T_K - T_O} \cdot \frac{P_1}{\alpha}. \tag{12}$$

Zauważmy, że dla małych $\alpha E_1/P_1$ otrzymalibyśmy po prostu

$$C = \frac{E_1}{T_K - T_O}. \tag{13}$$

Jeśli moc grzałki wynosi P_2, należy we wzorze (11) zamienić P_1 na P_2, a E_1 na E_2:

$$T_K = -\frac{P_2}{\alpha C} \exp\left(-\alpha \frac{E_2}{P_2}\right) + \frac{P_2}{\alpha C} + T_O. \tag{14}$$

Stąd możemy wyznaczyć E_2:

$$E_2 = -\frac{P_2}{\alpha} \ln\left[1 + (T_O - T_K)\frac{\alpha C}{P_2}\right]. \tag{15}$$

Po podstawieniu C z (12) i uporządkowaniu otrzymujemy również:

$$E_2 = -\frac{P_2}{\alpha} \ln\left[1 - \left(1 - e^{-\alpha E_1/P_1}\right)\frac{P_1}{P_2}\right]. \tag{16}$$

Zauważmy:

- dla $P_1 = P_2$ otrzymujemy $E_1 = E_2$; - również gdy $\alpha E_1/P_1 \ll 1$ i $\alpha E_1/P_2 \ll 1$, otrzymujemy $E_1 = E_2$ (pomijanie strat energii); - nie można wyznaczyć E_2, gdy

$$1 - \left(1 - e^{-\alpha E_1/P_1}\right)\frac{P_1}{P_2} \leq 0, \tag{17}$$

co odpowiada warunkowi

$$T_K - T_O > \frac{P_2}{\alpha C}, \tag{18}$$

tzn. grzałka o mocy P_2 nie jest w stanie osiągnąć temperatury T_K.

Podstawiając dane liczbowe, otrzymujemy:

$$E_2 \approx 3.2 \cdot 10^5 \text{ J}, \qquad \text{dla } P_2 = 300 \text{ W}, \tag{19}$$

$$E_2 \approx 8.2 \cdot 10^5 \text{ J}, \qquad \text{dla } P_2 = 200 \text{ W}. \tag{20}$$

Punktacja

Równanie na szybkość zmian temperatury (bilansu cieplnego), wzór (6),
wraz z uzasadnieniem .... 3 pkt.
Zależność temperatury od czasu przy włączonej grzałce, wzór (10) .... 2 pkt.
Pojemność cieplna, wzór (12) (lub równoważny) .... 1 pkt.
Energia zużyta w przypadku grzałki o mocy P_2, wzór (16) (lub równoważny) .... 2 pkt.
Dyskusja wyniku (zauważenie, że gdy $T_K - T_O > P_2/(\alpha C)$ osiągnięcie temperatury
końcowej nie jest możliwe) .... 1 pkt.
Wyniki liczbowe, wzory (19) oraz (20) .... 1 pkt.