LXIII OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde z trzech zadań można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.

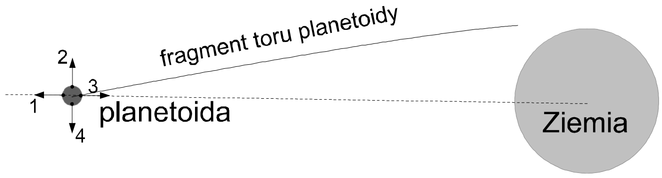
Zaobserwowano zbliżającą się do Ziemi kulistą planetoidę o średnicy $D = 10$ km i masie $M = 10^{15}$ kg. Według obliczeń nieuwzględniających oporów ruchu w atmosferze ziemskiej najmniejsza odległość od środka planetoidy do środka Ziemi wyniosłaby $r_1 = 6400$ km, a największa względna prędkość $v_1 = 20$ km/s. Aby zmniejszyć zagrożenie, wystrzelono w kierunku planetoidy rakiety z ładunkami termojądrowymi. Głowice rakiet mają się wbić na pewną głębokość w powierzchnię planetoidy, a następnie równocześnie wybuchnąć. W wyniku tego grunt ponad głowicami ma się zamienić w drobne odłamki oddalające się z dużą prędkością od planetoidy, a pozostała jej część nie rozpadnie się. Całkowita energia wybuchu ładunków termojądrowych wynosi $E_w = 4 \cdot 10^{18}$ J = 1000 Mt (megaton) trotylu. Szacuje się, że masa odłamków wyniesie $m = 10^{14}$ kg oraz że w układzie środka masy planetoidy uzyskają one całkowity pęd $p = \sqrt{x \cdot 2mE_w}$, gdzie $x = 0{,}2$, skierowany prostopadle do powierzchni planetoidy. Rakiety mogą dotrzeć do planetoidy najwcześniej, gdy będzie ona w odległości $d = 200000$ km od Ziemi.

a) Rozważano cztery miejsca na planetoidzie (patrz Rys. 1.), w których ładunki powinny wybuchnąć, oraz trzy różne chwile, w których to powinno nastąpić: jak najwcześniej, tzn. w jak największej odległości od Ziemi, jak najpóźniej, tzn. tuż przed osiągnięciem minimalnej odległości od Ziemi, oraz gdy planetoida będzie w odległości ok. 12 tys. km od środka Ziemi. Który z tych wariantów spowoduje, że planetoida ominie Ziemię w największej odległości?

b) O ile wzrośnie najmniejsza odległość środka Ziemi od planetoidy w wyniku tej akcji?

Pomiń wpływ Słońca, Księżyca i innych ciał niebieskich.

Stała grawitacyjna $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$, masa Ziemi $M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, promień Ziemi $r_Z = 6370$ km.

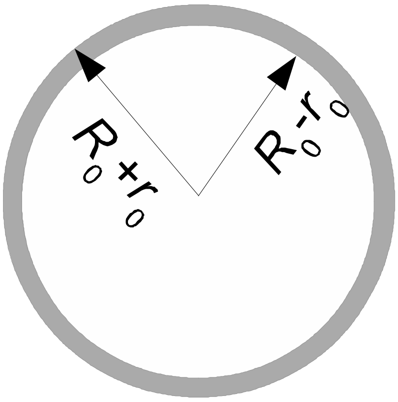


Rys. 1. Strzałki wskazują kierunek średniej prędkość odłamków względem planetoidy, a ich początki to rozważane miejsca wybuchu. Strzałki 1 i 3 są równoległe do osi środek planetoidy–środek Ziemi, strzałki 2 i 4 są prostopadłe do tej osi.

Zadania 2. i 3. na str. 2.

Zadanie 2.

Dętka rowerowa przy minimalnym napompowaniu, takim że ciśnienie wewnętrzne jest równe zewnętrznemu, tworzy torus o promieniach R_0 oraz r_0 ($R_0 > r_0$) – patrz Rys. 2.



Rys. 2.

Względne rozciągnięcie $\Delta l/l_0$ powierzchni gumy dętki w dowolnie wybranym kierunku oznaczonym przez $||$ zależy od naprężenia w tym kierunku $\sigma_{||}$ oraz od naprężenia w kierunku prostopadłym $\sigma_{\perp}$ zgodnie ze wzorem

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha\sigma_{||} - \beta\sigma_{\perp},$$

gdzie $\alpha > 2\beta > 0$.

Dętkę napompowano tak, że ciśnienie w jej wnętrzu przekracza ciśnienie atmosferyczne o p_1. Wyznacz promienie R oraz r torusa, jaki tworzy ta dętka po takim napompowaniu.

Podaj wyniki liczbowe na R i r oraz $\frac{R-R_0}{R}$ i $\frac{r-r_0}{r_0}$ dla $r_0 = 0{,}013$ m, $R_0 = 0{,}3$ m, $\alpha = 5{,}0\cdot10^{-5}$ m/N, $\beta = 0{,}49\cdot\alpha$, $p_1 = 2{,}0\cdot10^5$ Pa. Przyjmij, że $R \gg r$, tzn. że lokalnie dętkę można traktować jak powierzchnię boczną walca.

Naprężenie w rozważanym zagadnieniu to siła na jednostkę długości, jaka dąży do odsunięcia od siebie dwóch fragmentów gumy wydzielonych przez odcinek prostopadły do tej siły. W szczególności jeśli rozciągniemy prostokątny kawałek gumy do rozmiarów $l_x \times l_y$ i siła rozciągająca w kierunku x wynosi F_x, a siła rozciągająca w kierunku y wynosi F_y, to naprężenie w kierunku x jest równe F_x/l_y, natomiast naprężenie w kierunku y jest równe F_y/l_x.

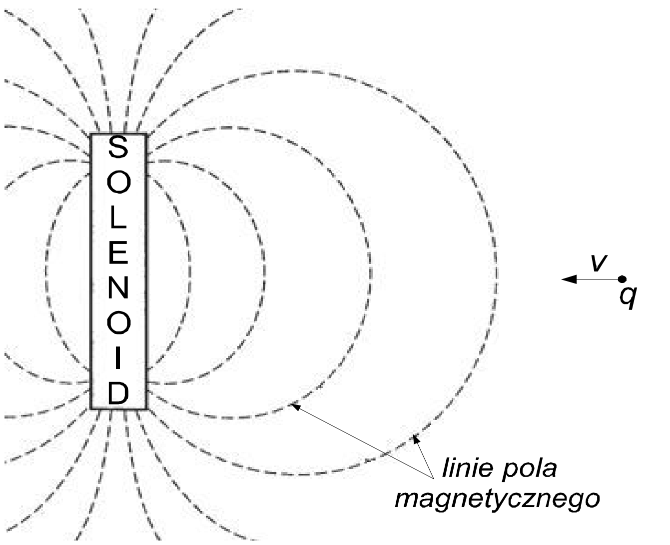
Zadanie 3.

Rozważmy gęsto nawiniętą cewkę (solenoid) o N zwojach, długości L i promieniu $R \ll L$. Zbliża się do niej cząstka o masie m i ładunku q. Prędkość cząstki w dużej ($\gg L$) odległości od cewki wynosi v, jest prostopadła do osi cewki i skierowana do jej środka symetrii.

Jakie jest najmniejsze natężenie I prądu płynącego przez cewkę, przy którym cząstka nie wpadnie do jej wnętrza?

Pomiń pole magnetyczne pochodzące od prądu płynącego w przewodach łączących źródło zasilania z cewką. Cewka jest tak nawinięta, że wzdłuż jej osi nie płynie prąd.

Podaj liczbową wartość I dla $N = 10000$, $R = 1$ cm, $L = 1$ m, $m = 1{,}7\cdot10^{-27}$ kg, $q = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C, $v = 100$ m/s. Przenikalność magnetyczna próżni: $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ N/A^2.



Rys. 3. Schematyczny rysunek odpowiadający sytuacji z zad. 3.

Rozwiązanie zadania 1.

Wyznaczenie zmiany prędkości planetoidy.

Zgodnie z treścią zadania prędkość środka masy odłamków wyniesie

$$v_{\text{od}} = \frac{p}{m} = \sqrt{0{,}2\frac{2E_w}{m}} = 126\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

To z zasady zachowania pędu oznacza, że pozostała część planetoidy uzyska dodatkową prędkość

$$V = \frac{mv_{\text{od}}}{M-m} = \frac{p}{M-m} = 14\ \frac{\text{m}}{\text{s}}. \tag{1}$$

W trakcie ruchu planetoidy obowiązują zasady zachowania energii mechanicznej oraz momentu pędu

$$E_c = \frac{M}{2}\left(v_\perp^2 + v_r^2\right) - \frac{GM_ZM}{r}, \tag{2}$$

$$J = Mrv_\perp. \tag{3}$$

gdzie v_r, $v_\perp$ są odpowiednio radialną oraz prostopadłą do promienia wodzącego $\vec{r}$ składowymi prędkości środka masy planetoidy w układzie inercjalnym z Ziemią w środku.

W punkcie najbliższym Ziemi $r = r_{\text{min}}$ mamy $v_r = 0$, co pozwala na wyeliminowanie $v_\perp$ z powyższych równań i wyznaczenie r_{min}

$$r_{\text{min}} = \frac{j^2}{GM_Z + \sqrt{2 \cdot e_c \cdot j^2 + (GM_Z)^2}}, \tag{4}$$

gdzie oznaczyliśmy $j = J/M$, $e_c = E/M$ i wybraliśmy mniejszy dodatni pierwiastek równania kwadratowego. Zauważmy, że r_{min} jest rosnącą funkcją j i malejącą funkcją e_c.

Gdyby nie zmieniano prędkości planetoidy, mielibyśmy

$$e_c = \frac{v_1^2}{2} - \frac{GM_Z}{r_1},\ j = r_1v_1. \tag{5}$$

Z zasady zachowania energii prędkość planetoidy w odległości d od środka Ziemi, przed wybuchem, wynosi $v_d = \sqrt{2\left(e_c - \frac{GM_Z}{d}\right)} \approx 16$ km/s. W wyniku wybuchu kwadrat prędkości planetoidy, a tym samym $2 \cdot e_c$ zmieni się o $2\Delta e_c = 2vV\cos\alpha + V^2$, gdzie v jest prędkością planetoidy w chwili wybuchu, a α – kątem między $\vec{V}$ a $\vec{v}$. Zatem $\Delta e_c/e_c$ może być co najwyżej równe $2V/v_d \approx 1,8 \cdot 10^{-3}$. Z drugiej strony zmiana j wyniesie $\Delta j = Vr\sin\beta$, gdzie β jest kątem między $\vec{V}$ a $\vec{r}$. Zatem $\Delta j/j = rV\sin\beta/(r_1v_1)$ i maksymalna możliwą wartość tego ilorazu osiągniemy dla maksymalnej możliwej wartości r i kąta β zbliżonego do 90° – wyniesie ona $2 \cdot 10^{-2}$. Biorąc to oraz wzór na r_{min} pod uwagę, dochodzimy do wniosku, że najlepszym wariantem miejsca wybuchu jest wariant 4 i że powinno to nastąpić jak najdalej od Ziemi. Podstawiając

$$j = r_1v_1 + d \cdot V, \tag{6}$$

i pomijając zmianę e_c, ze wzoru na r_{min} otrzymamy

$$r_{\text{min}} = 6566\ \text{km}, \tag{7}$$

czyli

$$\Delta r_{\text{min}} = 166\ \text{km}. \tag{8}$$

Zauważmy, że fragment rozwiązania odpowiadający wyznaczeniu minimalnej odległości planetoidy od Ziemi jest identyczny z analogiczną cześcią rozwiązania zadania z planetoidą z I stopnia obecnej Olimpiady.