LXIII OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde z trzech zadań można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.

Zaobserwowano zbliżającą się do Ziemi kulistą planetoidę o średnicy $D = 10$ km i masie $M = 10^{15}$ kg. Według obliczeń nieuwzględniających oporów ruchu w atmosferze ziemskiej najmniejsza odległość od środka planetoidy do środka Ziemi wyniosłaby $r_1 = 6400$ km, a największa względna prędkość $v_1 = 20$ km/s. Aby zmniejszyć zagrożenie, wystrzelono w kierunku planetoidy rakiety z ładunkami termojądrowymi. Głowice rakiet mają się wbić na pewną głębokość w powierzchnię planetoidy, a następnie równocześnie wybuchnąć. W wyniku tego grunt ponad głowicami ma się zamienić w drobne odłamki oddalające się z dużą prędkością od planetoidy, a pozostała jej część nie rozpadnie się. Całkowita energia wybuchu ładunków termojądrowych wynosi $E_w = 4 \cdot 10^{18}$ J $=$ 1000 Mt (megaton) trotylu. Szacuje się, że masa odłamków wyniesie $m = 10^{14}$ kg oraz że w układzie środka masy planetoidy uzyskają one całkowity pęd $p = \sqrt{x \cdot 2mE_w}$, gdzie $x = 0{,}2$, skierowany prostopadle do powierzchni planetoidy. Rakiety mogą dotrzeć do planetoidy najwcześniej, gdy będzie ona w odległości $d = 200000$ km od Ziemi.

a) Rozważano cztery miejsca na planetoidzie (patrz Rys. 1.), w których ładunki powinny wybuchnąć, oraz trzy różne chwile, w których to powinno nastąpić: jak najwcześniej, tzn. w jak największej odległości od Ziemi, jak najpóźniej, tzn. tuż przed osiągnięciem minimalnej odległości od Ziemi, oraz gdy planetoida będzie w odległości ok. 12 tys. km od środka Ziemi. Który z tych wariantów spowoduje, że planetoida ominie Ziemię w największej odległości?

b) O ile wzrośnie najmniejsza odległość środka Ziemi od planetoidy w wyniku tej akcji?

Pomiń wpływ Słońca, Księżyca i innych ciał niebieskich.

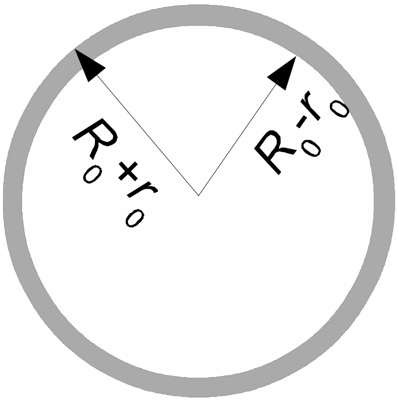
Stała grawitacyjna $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$, masa Ziemi $M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, promień Ziemi $r_Z = 6370$ km.

Rys. 1. Strzałki wskazują kierunek średniej prędkość odłamków względem planetoidy, a ich początki to rozważane miejsca wybuchu. Strzałki 1 i 3 są równoległe do osi środek planetoidy–środek Ziemi, strzałki 2 i 4 są prostopadłe do tej osi.

Zadania 2. i 3. na str. 2.

Zadanie 2.

Dętka rowerowa przy minimalnym napompowaniu, takim że ciśnienie wewnętrzne jest równe zewnętrznemu, tworzy torus o promieniach R_0 oraz r_0 ($R_0 > r_0$) – patrz Rys. 2.



Rys. 2.

Względne rozciągnięcie $\Delta l/l_0$ powierzchni gumy dętki w dowolnie wybranym kierunku oznaczonym przez $||$ zależy od naprężenia w tym kierunku $\sigma_{||}$ oraz od naprężenia w kierunku prostopadłym $\sigma_\perp$ zgodnie ze wzorem

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha\sigma_{||} - \beta\sigma_\perp,$$

gdzie $\alpha > 2\beta > 0$.

Dętkę napompowano tak, że ciśnienie w jej wnętrzu przekracza ciśnienie atmosferyczne o p_1. Wyznacz promienie R oraz r torusa, jaki tworzy ta dętka po takim napompowaniu.

Podaj wyniki liczbowe na R i r oraz $\frac{R-R_0}{R}$ i $\frac{r-r_0}{r_0}$ dla $r_0 = 0{,}013$ m, $R_0 = 0{,}3$ m, $\alpha = 5{,}0\cdot 10^{-5}$ m/N, $\beta = 0{,}49\cdot\alpha$, $p_1 = 2{,}0\cdot 10^5$ Pa. Przyjmij, że $R \gg r$, tzn. że lokalnie dętkę można traktować jak powierzchnię boczną walca.

Naprężenie w rozważanym zagadnieniu to siła na jednostkę długości, jaka dąży do odsunięcia od siebie dwóch fragmentów gumy wydzielonych przez odcinek prostopadły do tej siły. W szczególności jeśli rozciągniemy prostokątny kawałek gumy do rozmiarów $l_x \times l_y$ i siła rozciągająca w kierunku x wynosi F_x, a siła rozciągająca w kierunku y wynosi F_y, to naprężenie w kierunku x jest równe F_x/l_y, natomiast naprężenie w kierunku y jest równe F_y/l_x.

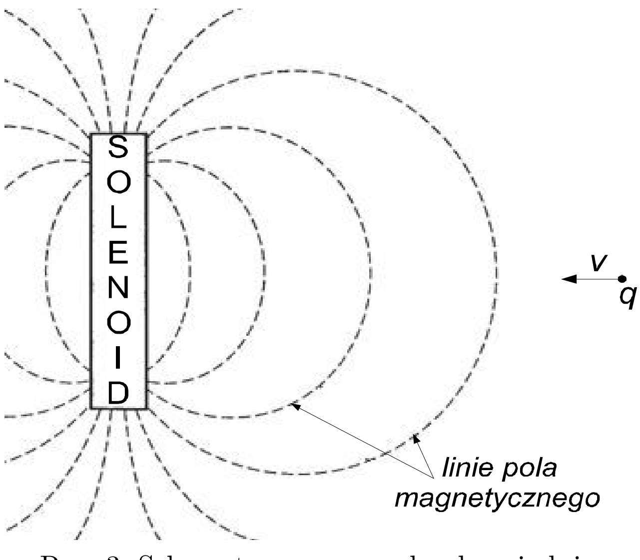
Zadanie 3.

Rozważmy gęsto nawiniętą cewkę (solenoid) o N zwojach, długości L i promieniu $R \ll L$. Zbliża się do niej cząstka o masie m i ładunku q. Prędkość cząstki w dużej ($\gg L$) odległości od cewki wynosi v, jest prostopadła do osi cewki i skierowana do jej środka symetrii.

Jakie jest najmniejsze natężenie I prądu płynącego przez cewkę, przy którym cząstka nie wpadnie do jej wnętrza?

Pomiń pole magnetyczne pochodzące od prądu płynącego w przewodach łączących źródło zasilania z cewką. Cewka jest tak nawinięta, że wzdłuż jej osi nie płynie prąd.

Podaj liczbową wartość I dla $N = 10000$, $R = 1$ cm, $L = 1$ m, $m = 1{,}7\cdot 10^{-27}$ kg, $q = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C, $v = 100$ m/s. Przenikalność magnetyczna próżni: $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ N/A^2.



Rys. 3. Schematyczny rysunek odpowiadający sytuacji z zad. 3.

Rozwiązanie zadania 2.

Oznaczmy przez σ_l naprężenie dętki w kierunku powodującym zwiększenie promienia R, natomiast przez σ_p – naprężenie dętki w kierunku powodującym zwiększenie promienia r.

Rozważmy fragment dętki będący zgodnie z treścią zadania w dobrym przybliżeniu powierzchnią boczną walca o długości l i promieniu r. Przetnijmy ten walec płaszczyzną w której leży oś walca. Zgodnie z definicją naprężenia, dwa powstałe z tego przecięcia fragmenty opony przyciągają się siłą $2l\sigma_p$. Z drugiej strony sprężone powietrze odpycha je od siebie siłą $l \cdot 2r \cdot p_1$ ($l \cdot 2r$ jest powierzchnią rozważanego przekroju). Ponieważ rozważamy stan równowagi, mamy $2l\sigma_p = l \cdot 2r \cdot p_1$, co daje

$$\sigma_p = rp_1. \tag{9}$$

Teraz przetnijmy dętkę płaszczyzną, w której leży oś symetrii obrotowej torusa. Zgodnie z definicją naprężenia, dwa powstałe z tego przecięcia fragmenty opony przyciągają się siłą $2 \cdot 2\pi r\sigma_l$ ($2\pi r$ to obwód każdego z dwóch okręgów powstałych w wyniku tego przecięcia). Z drugiej strony sprężone powietrze odpycha je od siebie siłą $2 \cdot \pi r^2 p_1$ (πr^2 to pole każdego z dwóch kolistych przekrojów). Ponieważ rozważamy stan równowagi, mamy $2 \cdot 2\pi r\sigma_l = 2 \cdot \pi r^2 p_1$, co daje

$$2\sigma_l = rp_1. \tag{10}$$

Z drugiej strony, ze wzoru w treści zadania

$$\frac{R - R_0}{R_0} = \alpha\sigma_l - \beta\sigma_p, \quad \frac{r - r_0}{r_0} = \alpha\sigma_p - \beta\sigma_l. \tag{11}$$

Rozwiązując powstały układ równań otrzymamy

$$r = r_0 \frac{1}{1 - \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) p_1 r_0}, \tag{12}$$

$$R = R_0 \left[1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{2} - \beta\right) p_1 r_0}{1 - \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) p_1 r_0}\right]. \tag{13}$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymamy

$$r = 0{,}0144 \text{ m}, \quad \frac{r - r_0}{r_0} = 0,11,$$
$$R = 0{,}3004 \text{ m}, \quad \frac{R - R_0}{R} = 0,14 \cdot 10^{-3}.$$

Z otrzymanych wzorów wynika, że p_1 nie może przekroczyć wartości $1/\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)/r_0$ – przy zbliżaniu się p_1 do tej wartości rozmiary dętki stają się nieskończone. Z jednej strony jest to konsekwencją faktu, że naprężenie jest proporcjonalne do rp_1. Nie oznacza, to że w rzeczywistym przypadku wystąpi taka sytuacja – wzór wiążący naprężenie z względnym wydłużeniem jest wzorem przybliżonym, a prócz tego przy pewnych rozmiarach dętki nastąpi jej rozerwanie.

Zauważmy również, że względny wzrost r jest większy niż względny wzrost R. Co więcej dla wartości liczbowych podanych w zadaniu (odpowiadających rzeczywistym parametrom gumy) $\Delta R/R$ jest znacznie mniejsze niż $\Delta r/r$.