LXIII OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde z trzech zadań można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.

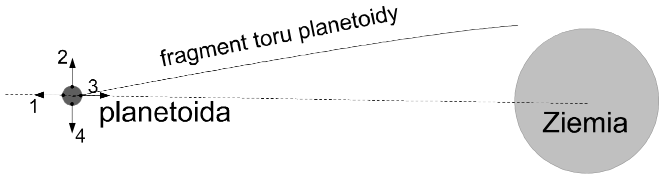
Zaobserwowano zbliżającą się do Ziemi kulistą planetoidę o średnicy $D = 10$ km i masie $M = 10^{15}$ kg. Według obliczeń nieuwzględniających oporów ruchu w atmosferze ziemskiej najmniejsza odległość od środka planetoidy do środka Ziemi wyniosłaby $r_1 = 6400$ km, a największa względna prędkość $v_1 = 20$ km/s. Aby zmniejszyć zagrożenie, wystrzelono w kierunku planetoidy rakiety z ładunkami termojądrowymi. Głowice rakiet mają się wbić na pewną głębokość w powierzchnię planetoidy, a następnie równocześnie wybuchnąć. W wyniku tego grunt ponad głowicami ma się zamienić w drobne odłamki oddalające się z dużą prędkością od planetoidy, a pozostała jej część nie rozpadnie się. Całkowita energia wybuchu ładunków termojądrowych wynosi $E_w = 4 \cdot 10^{18}$ J $=$ 1000 Mt (megaton) trotylu. Szacuje się, że masa odłamków wyniesie $m = 10^{14}$ kg oraz że w układzie środka masy planetoidy uzyskają one całkowity pęd $p = \sqrt{x \cdot 2mE_w}$, gdzie $x = 0{,}2$, skierowany prostopadle do powierzchni planetoidy. Rakiety mogą dotrzeć do planetoidy najwcześniej, gdy będzie ona w odległości $d = 200000$ km od Ziemi.

a) Rozważano cztery miejsca na planetoidzie (patrz Rys. 1.), w których ładunki powinny wybuchnąć, oraz trzy różne chwile, w których to powinno nastąpić: jak najwcześniej, tzn. w jak największej odległości od Ziemi, jak najpóźniej, tzn. tuż przed osiągnięciem minimalnej odległości od Ziemi, oraz gdy planetoida będzie w odległości ok. 12 tys. km od środka Ziemi. Który z tych wariantów spowoduje, że planetoida ominie Ziemię w największej odległości?

b) O ile wzrośnie najmniejsza odległość środka Ziemi od planetoidy w wyniku tej akcji?

Pomiń wpływ Słońca, Księżyca i innych ciał niebieskich.

Stała grawitacyjna $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$, masa Ziemi $M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, promień Ziemi $r_Z = 6370$ km.

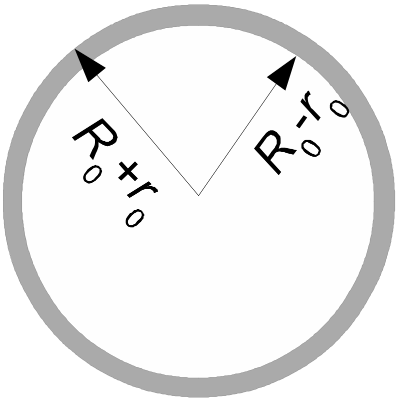


Rys. 1. Strzałki wskazują kierunek średniej prędkość odłamków względem planetoidy, a ich początki to rozważane miejsca wybuchu. Strzałki 1 i 3 są równoległe do osi środek planetoidy–środek Ziemi, strzałki 2 i 4 są prostopadłe do tej osi.

Zadania 2. i 3. na str. 2.

Zadanie 2.

Dętka rowerowa przy minimalnym napompowaniu, takim że ciśnienie wewnętrzne jest równe zewnętrznemu, tworzy torus o promieniach R_0 oraz r_0 ($R_0 > r_0$) – patrz Rys. 2.



Rys. 2.

Względne rozciągnięcie $\Delta l/l_0$ powierzchni gumy dętki w dowolnie wybranym kierunku oznaczonym przez $||$ zależy od naprężenia w tym kierunku $\sigma_{||}$ oraz od naprężenia w kierunku prostopadłym $\sigma_\perp$ zgodnie ze wzorem

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha\sigma_{||} - \beta\sigma_\perp,$$

gdzie $\alpha > 2\beta > 0$.

Dętkę napompowano tak, że ciśnienie w jej wnętrzu przekracza ciśnienie atmosferyczne o p_1. Wyznacz promienie R oraz r torusa, jaki tworzy ta dętka po takim napompowaniu.

Podaj wyniki liczbowe na R i r oraz $\frac{R-R_0}{R}$ i $\frac{r-r_0}{r_0}$ dla $r_0 = 0{,}013$ m, $R_0 = 0{,}3$ m, $\alpha = 5{,}0\cdot 10^{-5}$ m/N, $\beta = 0{,}49\cdot\alpha$, $p_1 = 2{,}0\cdot 10^5$ Pa. Przyjmij, że $R \gg r$, tzn. że lokalnie dętkę można traktować jak powierzchnię boczną walca.

Naprężenie w rozważanym zagadnieniu to siła na jednostkę długości, jaka dąży do odsunięcia od siebie dwóch fragmentów gumy wydzielonych przez odcinek prostopadły do tej siły. W szczególności jeśli rozciągniemy prostokątny kawałek gumy do rozmiarów $l_x \times l_y$ i siła rozciągająca w kierunku x wynosi F_x, a siła rozciągająca w kierunku y wynosi F_y, to naprężenie w kierunku x jest równe F_x/l_y, natomiast naprężenie w kierunku y jest równe F_y/l_x.

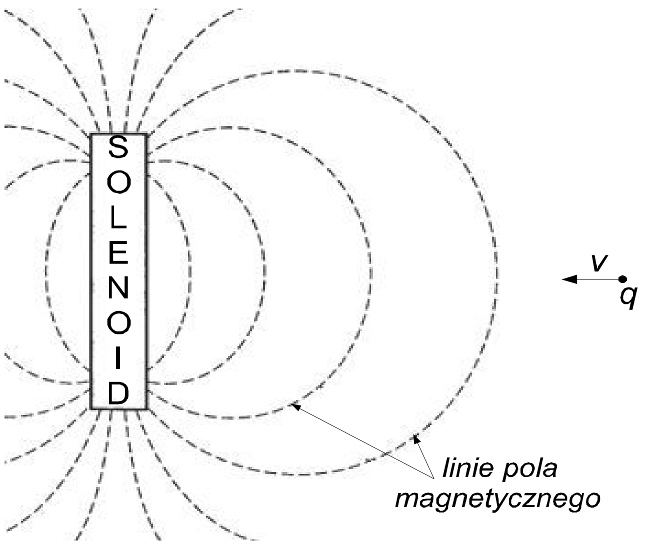
Zadanie 3.

Rozważmy gęsto nawiniętą cewkę (solenoid) o N zwojach, długości L i promieniu $R \ll L$. Zbliża się do niej cząstka o masie m i ładunku q. Prędkość cząstki w dużej ($\gg L$) odległości od cewki wynosi v, jest prostopadła do osi cewki i skierowana do jej środka symetrii.

Jakie jest najmniejsze natężenie I prądu płynącego przez cewkę, przy którym cząstka nie wpadnie do jej wnętrza?

Pomiń pole magnetyczne pochodzące od prądu płynącego w przewodach łączących źródło zasilania z cewką. Cewka jest tak nawinięta, że wzdłuż jej osi nie płynie prąd.

Podaj liczbową wartość I dla $N = 10000$, $R = 1$ cm, $L = 1$ m, $m = 1{,}7\cdot 10^{-27}$ kg, $q = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C, $v = 100$ m/s. Przenikalność magnetyczna próżni: $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ N/A^2.



Rys. 3. Schematyczny rysunek odpowiadający sytuacji z zad. 3.

Rozwiązanie zadania 3.

Zauważmy, że w płaszczyźnie prostopadłej do osi cewki i przechodzącej przez jej środek pole magnetyczne jest prostopadłe do tej płaszczyzny. Ponieważ początkowo cząstka porusza się w rozważanej płaszczyźnie, wektor siły Lorentza pochodzącej od pola magnetycznego leży w rozważanej płaszczyźnie. Zatem ruch cząstki będzie się odbywał w tej płaszczyźnie.

Jeśli cząstka porusza się z radialną prędkością v_r, to względem osi cewki działa na nią moment siły
$$M = qrv_rB(r). \tag{14}$$

Zmiana momentu pędu w małym czasie Δt wynosi

$$\Delta J = M\Delta t = qB(r)r\Delta r, \tag{15}$$

lub inaczej
$$\Delta J = \frac{q}{2\pi}2\pi B\left(r\right)r\Delta r = \frac{q}{2\pi}\Delta\Phi_B, \tag{16}$$

gdzie $\Delta\Phi_B$ jest strumieniem pola B przez płaski pierścień o promieniu r i szerokości Δr.

Oznacza to, że
$$J(r) - J(\infty) = \frac{q}{2\pi}\cdot\left(\Phi_B\left(r\right) - \Phi_B\left(\infty\right)\right), \tag{17}$$

gdzie $\Phi_B\left(r\right)$ to strumień pola B przez koło o promieniu r leżące w płaszczyźnie ruchu. Ponieważ prędkość początkowa jest skierowana do środka cewki, mamy

$$J(\infty) = 0. \tag{18}$$

Linie pola magnetycznego są liniami zamkniętymi – wewnątrz cewki biegną z pewnym zwrotem, a na zewnątrz powracają. Dlatego strumień pola przez bardzo duże koło jest bliski zeru:

$$\Phi_B\left(\infty\right) = 0. \tag{19}$$

Czyli na powierzchni cewki
$$J\left(R\right) = \frac{q}{2\pi}\cdot\Phi_B\left(R\right). \tag{20}$$

Z prawa Ampère'a strumień pola B przez wnętrze cewki to

$$\Phi_B\left(R\right) = \mu_0\frac{IN}{L}\pi R^2. \tag{21}$$

W krytycznym przypadku na powierzchni cewki pęd jest prostopadły do promienia. Ponadto moduł pędu pozostaje stały, zatem
$$J\left(R\right) = mvR. \tag{22}$$

Łącząc wszystko:
$$mvR = \frac{q}{2\pi}\cdot\mu_0\frac{IN}{L}\pi R^2. \tag{23}$$

Czyli ostatecznie:
$$I = \frac{2mvL}{\mu_0 qNR}. \tag{24}$$

Dla danych z zadania otrzymamy

$$I \approx 0{,}017\ \text{A}. \tag{25}$$