

## LXIV OLIMPIADA FIZYCZNA — ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

Rozwiązania zadań I stopnia należy przysyłać do **Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej** w terminach: część I — do 10 października b.r., część II — do 14 listopada b.r.. O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II.

Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć na stronie internetowej <http://www.kgof.edu.pl>.

### **Krótką informacją na temat poprawnej redakcji rozwiązań zadań Olimpiady Fizycznej**

Zadania powinny być rozwiązane jasno, przejrzysto i czytelnie. Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce papieru. Poszczególne etapy rozumowania należy opisać, a wszelkie zależności fizyczne, które nie są wprost podane w podręcznikach szkolnych – udowodnić. Należy również objaśnić wszelkie oznaczenia występujące w rozwiązaniach zadań. Rysunki mogą być wykonane odręcznie – muszą być jednak przejrzyste i czytelne oraz dobrze opisane w tekście.

Rozumowanie przedstawione w rozwiązaniach nie może zawierać luk logicznych. Każdy krok rozumowania powinien być zwięźle opisany, a przyjęte założenia – klarownie uzasadnione. Rozwlekłość jest uznawana za ujemną cechę pracy.

Rozwiązanie zadania teoretycznego powinno być poprzedzone analizą problemu poruszanego w zadaniu, a zakończone dyskusją wyników. Rozwiązania zadań teoretycznych powinny odnosić się do ogólnej sytuacji opisanej w treści, dane liczbowe (o ile podane) powinny być podstawione dopiero do ostatecznych wzorów.

W zadaniach doświadczalnych należy wyraźnie rozgraniczyć części teoretyczną i doświadczalną. Część teoretyczna zadania doświadczalnego powinna zawierać analizę problemu wraz z wyprowadzeniem niezbędnych wzorów (o ile nie ma ich wprost w podręcznikach szkolnych) oraz sugestie metody doświadczalnej. Część doświadczalna powinna zawierać m.in. opis układu doświadczalnego ilustrowany rysunkiem, opis wykonanych pomiarów, wyniki pomiarów, analizę czynników mogących wpływać na wyniki (jak np. rozpraszanie energii lub opory wewnętrzne mierników), opracowanie wyników wraz z dyskusją niepewności pomiarowych. Wykresy do zadania doświadczalnego powinny być starannie wykonane, najlepiej na papierze milimetrowym. Ocenie podlegają wyłącznie elementy rozwiązania opisane w pracy. W zadaniach doświadczalnych osobno oceniana jest część teoretyczna i część doświadczalna.

W rozwiązaniach można posługiwać się dowolnym układem jednostek, chyba że tekst zadania mówi wyraźnie inaczej.

## CZĘŚĆ II (termin wysyłania rozwiązań — 14 listopada 2014 r.)

**Uwaga:** Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię, adres e-mail oraz adres autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać także nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki. Osoby, które chcą być poinformowane listownie o wynikach kwalifikacji, do pracy powinny dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę z naklejonym znaczkiem.

### ZADANIA TEORETYCZNE

Należy przesłać rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

#### Zadanie T1

Zorganizowano "Zawody w podskokach narciarskich" dla początkujących narciarzy. Zawody odbywają się na górze o kształcie danym wzorem

$$y = \begin{cases} B \cdot x^2 & \text{dla } x \leq 0, \\ -B \cdot x^2 & \text{dla } x > 0, \end{cases}$$

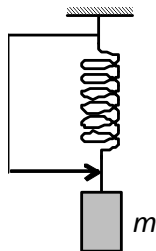
gdzie  $y$  jest składową pionową,  $x$  – składową poziomą, a  $B$  – stałą. Rozbieg zaczyna się na stoku w punkcie  $y = H$ , a zawodnicy wybijają się w punkcie  $y = 0$ . Wiadomo, że najlepsi zawodnicy potrafią się wybić na wysokość  $y = h$ . Niech  $l$  oznacza poziomą długość skoku, tzn. miejscem lądowania skoczka jest  $x = l$ ,  $y = -Bl^2$ .

Wyznacz zależność długości skoku  $l$  najlepszego skoczka od wysokości rozbiegu  $H$ .

Pomiń wpływ powietrza na ruch skoczka (początkujący narciarze jeżdżą wolno).

#### Zadanie T2

Na nieważkiej sprężynie o stałej sprężystości  $k$  i długości swobodnej  $l_0$  wisi ciężarek o masie  $m$ . Sprężyna jest wykonana z cienkiego drutu o zerowym oporze tworzącego zwojnicę o liczbie zwojów  $n$  ( $n \gg 1$ ), nawiniętą na powierzchni walcowej i zwartą zewnętrznym odcinkiem tego drutu. Promień walca jest równy  $r$ , przy czym  $r \ll l_0$ . Przyspieszenie ziemskie wynosi  $g$ .



Ciężarek zawieszony na sprężynce. Strzałką oznaczono bezoporowy styk ślizgowy, pozwalający ciężarkowi poruszać się wzdłuż osi pionowej bez tarcia.

Ciężarek odciągnięto w dół, tak że sprężyna osiągnęła długość  $l_1$ . Natężenie prądu w zwojnicy wynosiło w tym momencie  $I_1$ . Puszczono ciężarek. Jaka będzie długość  $l_2$  sprężyny w chwili zatrzymania się ciężarka w górnym położeniu i ile będzie wynosiło w tej chwili natężenie prądu  $I_2$ ?

Podaj wyniki liczbowe dla  $k = 50 \text{ N/m}$ ,  $l_0 = 20 \text{ cm}$ ,  $m = 0,3 \text{ kg}$ ,  $n = 50$ ,  $r = 2 \text{ cm}$ ,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ,  $l_1 = 30 \text{ cm}$ ,  $I_1 = 200 \text{ A}$ .

Wskazówki:

1. Zwoje solenoidu wzajemnie się przyciągają, dlatego na końce solenoidu działa siła skierowana wzdłuż jego osi. Dla długiego solenoidu bez rdzenia, w którym płynie prąd  $I$ , siła ta jest równa

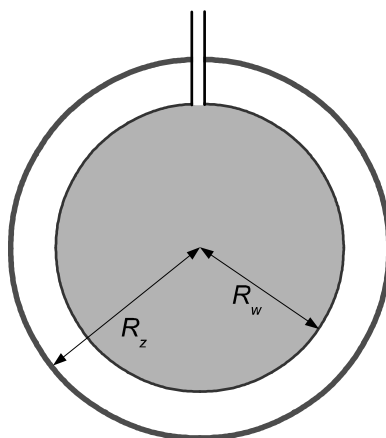
$$F_I = \frac{\mu_0 S}{2} \left( \frac{In}{l} \right)^2,$$

gdzie  $S$  – pole przekroju solenoidu.

2. W przypadku zamkniętego obwodu o oporze zerowym, strumień indukcji magnetycznej  $B$  przez ten obwód jest stały w czasie (w przeciwnym przypadku w obwodzie indukowałyby się niezerowa siła elektromotoryczna, a to wobec zerowego oporu powodowałyby przepływ prądu o nieskończenie wielkim natężeniu).

### Zadanie T3

Skroplony gaz jest przechowywany w naczyniu (termosie) składającym się z naczynia wewnętrznego w kształcie kuli o promieniu  $R_w$  i naczynia zewnętrznego w kształcie powłoki kulistej o promieniu wewnętrznym  $R_z$  - patrz rysunek. Środki geometryczne obu naczyń się pokrywają, a między nimi panuje próżnia.



Przekrój termosu.

Przyjmij, że naczynie zewnętrzne promieniuje jak ciało doskonale czarne, natomiast naczynie wewnętrzne – jak ciało doskonale szare: moc promieniowania jego fragmentu o powierzchni  $\Delta S$  jest określona wzorem  $P_{\Delta S} = A \cdot \Delta S \cdot \sigma T^4$ , gdzie  $T$  jest temperaturą powierzchni w skali Kelvina,  $\sigma$  – stałą Stefana-Boltzmana, a  $A$  – pewną stałą (współczynnikiem emisji lub względną zdolnością emisyjną) z zakresu od 0 do 1 charakteryzującą powierzchnię. Jednocześnie ciało doskonale szare pochłania ułamek równy  $A$  padającego na nie promieniowania, a odbija (rozprasza) całą resztę.

a) Wykaż, że jeśli całkowita moc promieniowania wysyłanego do wewnątrz przez naczynie zewnętrzne wynosi  $P$ , to moc promieniowania padającego na naczynie wewnętrzne wynosi  $PS_w/S_z$ , gdzie  $S_w$  jest powierzchnią wewnętrznego naczynia, a  $S_z$  – wewnętrzną powierzchnią zewnętrznego naczynia.

Wewnętrzne naczynie całkowicie wypełniono skroplonym gazem o gęstości  $\rho$ , temperaturze  $T_w$  (równej temperaturze wrzenia) i ciepłe parowania  $c_p$ . Temperatura otoczenia wynosi  $T_z$ .

b) Wyznacz czas  $t$ , po jakim cała ciecz w naczyniu odparuje.

Uwaga: Wewnętrzne naczynie jest połączone cienką, pionową rurką z otoczeniem. Przez tę rurkę można nalewać lub wylewać ciecz i przez nią para może się wydostawać na zewnątrz. Ta rurka nie ma wpływu na ilość ciepła dopływającego do naczynia.

Przyjmij, że temperatura zewnętrznego naczynia jest równa temperaturze otoczenia, a wewnętrznego – temperaturze skroplonego gazu.

Podaj wynik liczbowy dla  $R_w = 0,2$  m,  $R_z = 0,3$  m,  $T_z = 300$  K,  $T_w = 77$  K,  $\rho = 807$  kg/m<sup>3</sup>,  $c_p = 198$  kJ/kg.

#### Zadanie T4 – numeryczne

Dla większości sprężyn siła sprężystości jest proporcjonalna do wydłużenia jedynie w przybliżeniu – bardzo dobrym dla małych wydłużeń, ale gorszym dla dużych. Dokładniejszym opisem tej zależności może być przyjęcie, że siła jest sumą wyrazu proporcjonalnego do wydłużenia sprężyny  $r$  oraz wyrazu proporcjonalnego do kwadratu wydłużenia  $r^2$ :

$$F = -kr - br^2.$$

Przyjmijmy, że jeden koniec sprężyny jest unieruchomiony w początku układu współrzędnych  $x-y$ , a do drugiego przymocowano ciało o masie  $m$ . Ponadto zakładamy, że sprężyna jest nieważka, siła  $F$  jest jedyną siłą działającą na to ciało, a także, że długość swobodnej (nierozciągniętej) sprężyny można pominąć w porównaniu z wydłużeniem.

W chwili początkowej  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $y = 0$ ,  $v_x = 0$ ,  $v_y = v_{y0}$ .

Wyznacz numerycznie tory ruchu tego ciała w przedziale czasu od 0 do 100 s i przedstaw je graficznie dla następujących wartości stałych:  $m = 1$  kg,  $k = 1 \frac{N}{m}$ ,  $x_0 = 0,5$  m,  $v_{y0} = 2$  m/s oraz  $b$  równych: 0, 0,1 N/m<sup>2</sup>, -0,1 N/m<sup>2</sup>, 0,2 N/m<sup>2</sup>, -0,2 N/m<sup>2</sup>.

#### Uwaga:

Rozwiązanie powinno zawierać: wzory używane w rozwiązaniu (wraz z wyprowadzeniem lub uzasadnieniem, jeśli nie są to wzory podane w treści zadania), opis zastosowanego algorytmu, opis kodu programu (lub np. arkusza kalkulacyjnego) użytego do rozwiązania wraz z sposobem zagwarantowania (lub sprawdzenia) właściwej dokładności wyników, wykres toru (dokładnie dla czasu podanego w treści zadania) dla każdej z podanych wartości  $b$  oraz jakościowe omówienie otrzymanych wyników.

Nie jest dopuszczalne użycie programów do obliczeń symbolicznych lub programów wyznaczających tor lub ruch automatycznie po podaniu wzoru na siłę.

Dodatkowe wskazówki dotyczące rozwiązywania zadań numerycznych znajdziesz w treściach i rozwiązaniach zadań numerycznych z poprzednich olimpiad.

## Rozwiązanie zadania T4 (numerycznego)

### Równania ruchu

Ruch rozważanego ciała będzie się odbywał w płaszczyźnie  $xy$ , zgodnie z równaniami ruchu

$$a_x = \frac{x F(r)}{r m}, \quad (19)$$

$$a_y = \frac{y F(r)}{r m}, \quad (20)$$

gdzie  $a_x, a_y$  są przyspieszeniami w kierunkach odpowiednio  $x$  oraz  $y$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , natomiast  $F(r) = -kr - br^2$  – zgodnie z treścią zadania.

Wygodnie jest wprowadzić zmienne bezwymiarowe (wykorzystujemy to, że  $k$  i  $m$  są dodatnie, a  $x_0$  – niezerowe)

$$T = \sqrt{\frac{k}{m}}t, \quad X = \frac{x}{x_0}, \quad Y = \frac{y}{x_0}. \quad (21)$$

$$V_x = \frac{dX}{dT} = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{1}{x_0} \frac{dx}{dt}, \quad V_y = \frac{dY}{dT} = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{1}{x_0} \frac{dy}{dt}. \quad (22)$$

W nowych zmiennych równania ruchu przyjmą postać

$$\frac{dV_x}{dT} = -X - BX\sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (23)$$

$$\frac{dX}{dT} = V_x, \quad (24)$$

$$\frac{dV_y}{dT} = -Y - BY\sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (25)$$

$$\frac{dY}{dT} = V_y, \quad (26)$$

gdzie  $B = \frac{m}{k}bx_0$ . Widać, że zredukowaliśmy liczbę niezależnych parametrów z 3 do 1, co jest szczególnie ważne przy rozważaniu różnych możliwych sytuacji.

Do powyższych równań należy dodać warunek, że dla  $T = 0$  (czyli  $t = 0$ )

$$X = 1, \quad Y = 0, \quad (27)$$

$$V_x = 0, \quad V_y = V_{y0}, \quad (28)$$

gdzie  $V_{y0} = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{1}{x_0} v_{y0}$ .

### Algorytm numeryczny

W celu rozwiązania numerycznego, zamieniamy  $\frac{dX}{dT} \rightarrow \frac{\Delta X}{\Delta T}$ ,  $\frac{dY}{dT} \rightarrow \frac{\Delta Y}{\Delta T}$ ,  $\frac{dV_x}{dT} \rightarrow \frac{\Delta V_x}{\Delta T}$ ,  $\frac{dV_y}{dT} \rightarrow \frac{\Delta V_y}{\Delta T}$ , gdzie  $\Delta$  odpowiada różnicy między wartością w chwili  $T_n$  oraz w chwili  $T_{n+1} = T_n + \Delta T$ , co prowadzi do układu równań różnicowych. Jest to bardzo wiele algorytmów, pozwalających na numeryczne rozwiązanie rozważanego zagadnienia. W niniejszym rozwiązaniu krok dzielimy na dwie części: najpierw wyznaczamy położenie w chwili  $T_n + \Delta T/2$ , w tym położeniu obliczamy siłę, na jej podstawie wyznaczmy prędkość w chwili  $T_n + \Delta T$ , a następnie położenie w chwili  $T_n + \Delta T$ . W efekcie dostajemy następujący układ równań rekurencyjnych, wiążący położenie ciała w chwili  $T_n$  z położeniem w chwili  $T_{n+1}$

$$X_{n+1/2} = X_n + V_{xn} \cdot \Delta T/2, \quad (29)$$

$$Y_{n+1/2} = Y_n + V_{yn} \cdot \Delta T/2, \quad (30)$$

$$R_{n+1/2} = \sqrt{X_{n+1/2}^2 + Y_{n+1/2}^2}, \quad (31)$$

$$V_{x\ n+1} = V_{x\ n} + (-X_{n+1/2} - BX R_{n+1/2}) \cdot \Delta T, \quad (32)$$

$$V_{y\ n+1} = V_{y\ n} + (-Y_{n+1/2} - BY R_{n+1/2}) \cdot \Delta T, \quad (33)$$

$$X_{n+1} = X_{n+1/2} + V_{x\ n+1} \cdot \Delta T/2, \quad (34)$$

$$Y_{n+1} = Y_{n+1/2} + V_{y\ n+1} \cdot \Delta T/2. \quad (35)$$

Algorytm odpowiadający powyższym równaniom jest znacznie efektywniejszy od algorytmu, w którym położenie i prędkość w chwili  $T_n + \Delta T$  wyznaczamy wprost na podstawie siły odpowiadającej położeniu w chwili  $T_n$ .

Do powyższego układu równań należy dodać warunek, że w chwili  $T = 0 = T_0$

$$X_0 = 1, Y_0 = 0, \quad (36)$$

$$V_{x0} = 0, V_{y0} = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{1}{x_0} v_{y0}. \quad (37)$$

Powyższe równanie rekurencyjne można wykorzystać w arkuszu kalkulacyjnym. W arkuszu dostępnym na stronie [www.kgof.edu.pl](http://www.kgof.edu.pl) utworzono kolumny

| n  | Xn | Yn | Vx n | Vy n | Xn+1/2 | Yn+1/2 | Rn+1/2 | Vx n+1 | Vy n+1 |
|----|----|----|------|------|--------|--------|--------|--------|--------|
| xn | yn | t  |      |      |        |        |        |        |        |

gdzie n jest numerem kroku (i jednocześnie numeruje wiersze), a wyrażenia w pozostałych kolumnach odpowiadają wyrażeniom pojawiającym się w rozważanych równaniach rekurencyjnych. Wartości  $X_n$   $Y_n$   $V_{x\ n}$   $V_{y\ n}$  dla  $n=1$  są określone na podstawie wartości początkowych. Nie ma kolumn odpowiadających  $X_{n+1}$  oraz  $Y_{n+1}$ , gdyż  $X_{n+1}$  oraz  $Y_{n+1}$  to po prostu  $X_n$  oraz  $Y_n$  w następnym wierszu. Na podstawie wartości z kolumn  $x_n$  oraz  $y_n$  jest robiony wykres, przy czym brane są pod uwagę wiersze dla  $t$  od 0 do 100 (sekund).

Rozważane równania rekurencyjne bardzo łatwo jest również przekształcić na program komputerowy, który w pętli obliczamy następane wartości położenia i prędkości, zgodnie z następującym pseudokodem

$$X = X + Vx * dT/2$$

$$Y = Y + Vy * dT/2$$

$$R = \text{pierwiastek}(X * X + Y * Y)$$

$$Vx = Vx - (X + B * X * R) * dT$$

$$Vy = Vy - (Y + B * Y * R) * dT$$

$$X = X + Vx * dT/2$$

$$Y = Y + Vy * dT/2$$

Do powyższych poleceń wykonywanych w pętli, należy dodać przypisanie początkowych wartości zmiennym  $X$ ,  $Y$ ,  $Vx$  oraz  $Vy$ , zapisywanie wartości  $X$  i  $Y$  obliczonych w danym kroku (lub rysowanie) oraz warunek końca iteracji (chwila  $t = 100$  s, czyli  $T = \sqrt{\frac{k}{m}} 100$  s). Programy w C++ oraz w Logo działające zgodnie z powyższym algorytmem są dołączone do rozwiązania dostępnego na stronie KGOF.

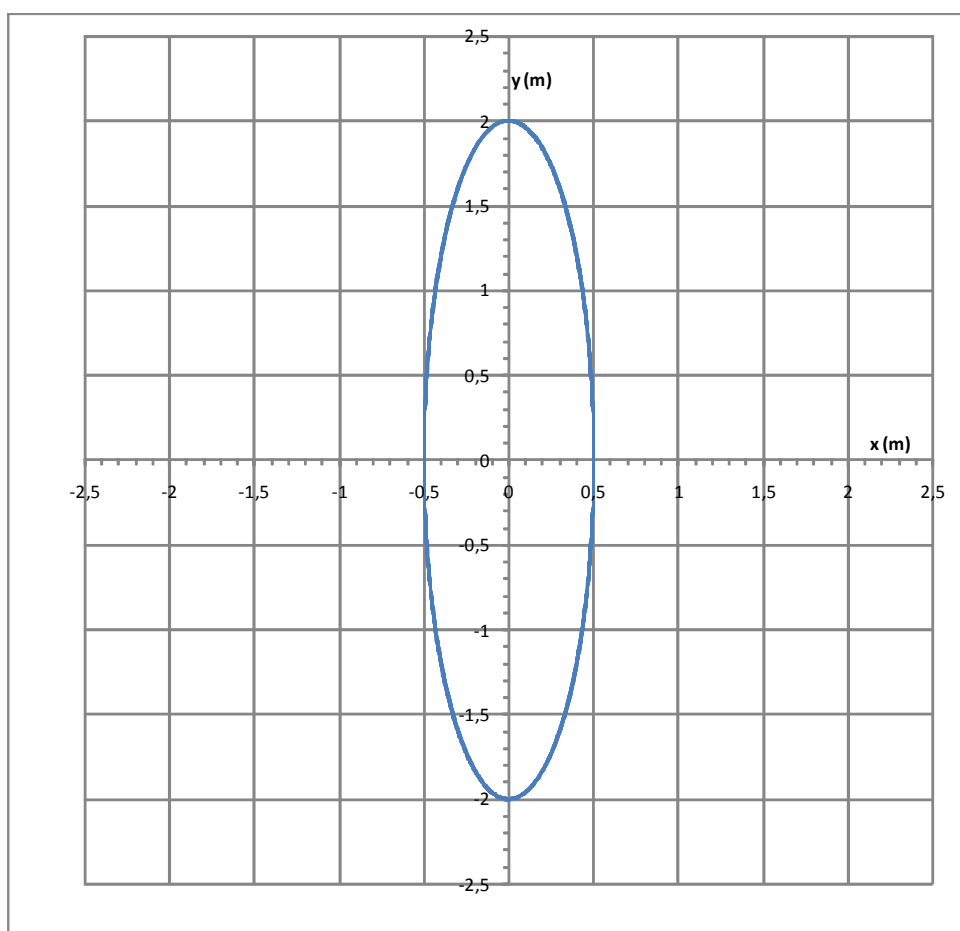
### Krok czasowy oraz sprawdzenie dokładności

Dla każdej z podanych w treści zadania wartości parametru  $b$  wykonano wykresy dla  $dT = 0,05$  (2000 kroków) oraz  $dT = 0,025$  (4000 kroków) dla czasu  $t$  od 0 s do 100 s. Ponieważ dla danego  $b$  wykresy były wizualnie identyczne, a w szczególności końcowe położenie ciała było takie samo (w ramach dokładności odczytu położenia z wykresu) dla obu rozważanych wartości  $dT$ , uznano, że  $dT = 0,05$  gwarantuje wystarczającą dokładność.

Dodatkowo przeanalizowano przypadek  $b = 0$ . Jest to zwykły dwuwymiarowy oscylator harmoniczny, którego ruch można wyznaczyć ściśle. Wiadomo, że ciało w tym przypadku powinno poruszać się po elipsie, przy czym, biorąc pod uwagę warunki początkowe, maksymalne wychylenie w kierunku  $x$  powinno wynosić  $x_0$ , natomiast maksymalne wychylenie w kierunku  $y$ , zgodnie z zasadą zachowania energii, powinno wynosić  $\sqrt{\frac{m}{k}}v_{y0} = 2$  m. Otrzymany wykres jest w pełni zgodny z tymi wynikami teoretycznymi.

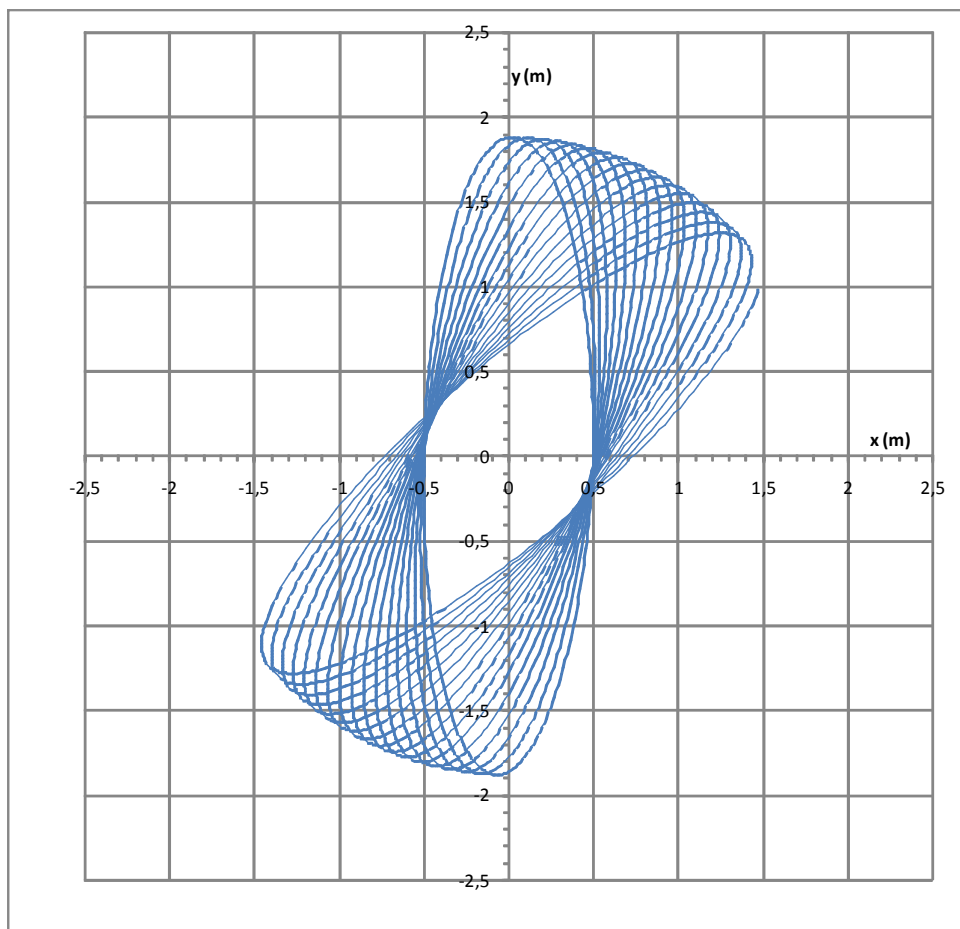
### Dyskusja otrzymanych wykresów

W przypadku  $b = 0$  zgodnie z oczekiwaniami ruch odbywa się po elipsie o krótszej półosi o długości 0,5 m i dłuższej o długości 2 m. Nie można tego ustalić na podstawie wykresu, jednak z warunków początkowych wynika, że ciało porusza się po tej elipsie przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara.



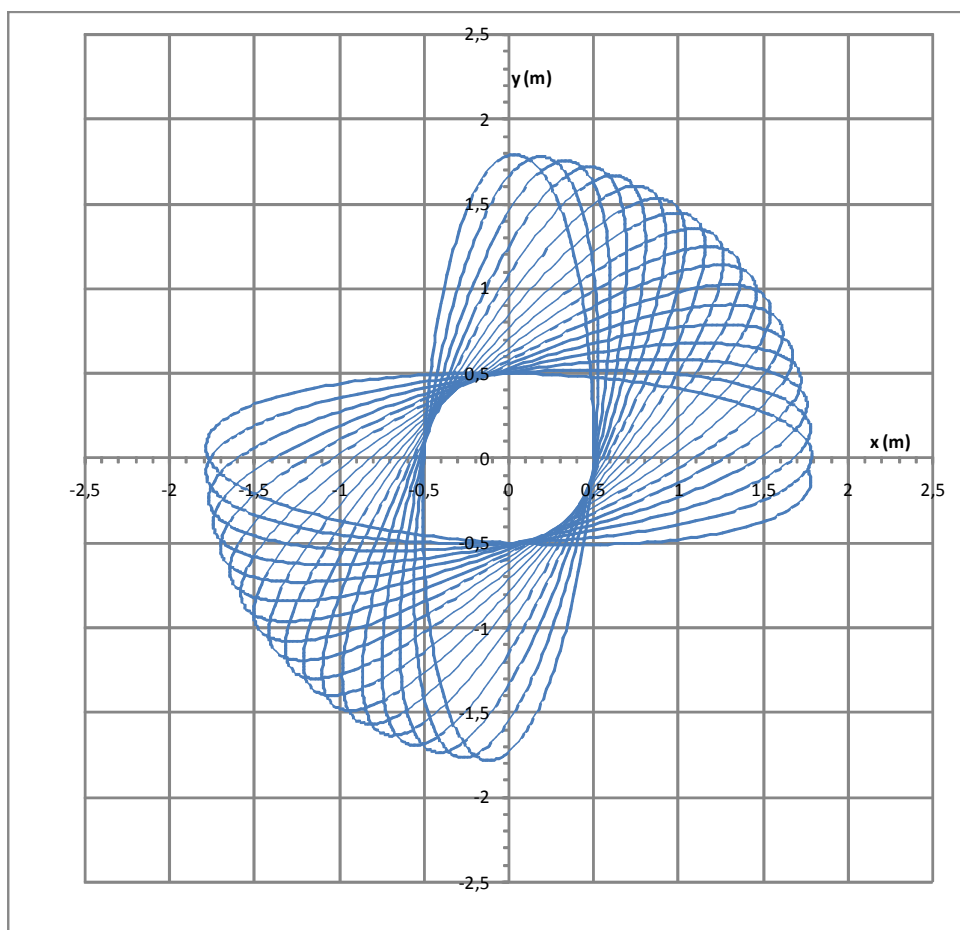
Rysunek 1. Tor ruchu ciała na sprężynce w przypadku  $b = 0$

W przypadku  $b = 0,1 \text{ N/m}^2$  maksymalne wychylenie ciała jest mniejsze niż w przypadku  $b = 0$ . Jest to oczekiwane gdyż ze wzrostem  $b$  rośnie (przy ustalonej odległości ciała od środka) siła przyciągająca ciało. Tor nie jest już krzywą zamkniętą - ruch można opisać jako złożenie ruchu po krzywej zamkniętej zbliżonej do elipsy i obrotu tej krzywej ze stałą prędkością, zwykle w takich przypadkach nazywaną prędkością precesji.



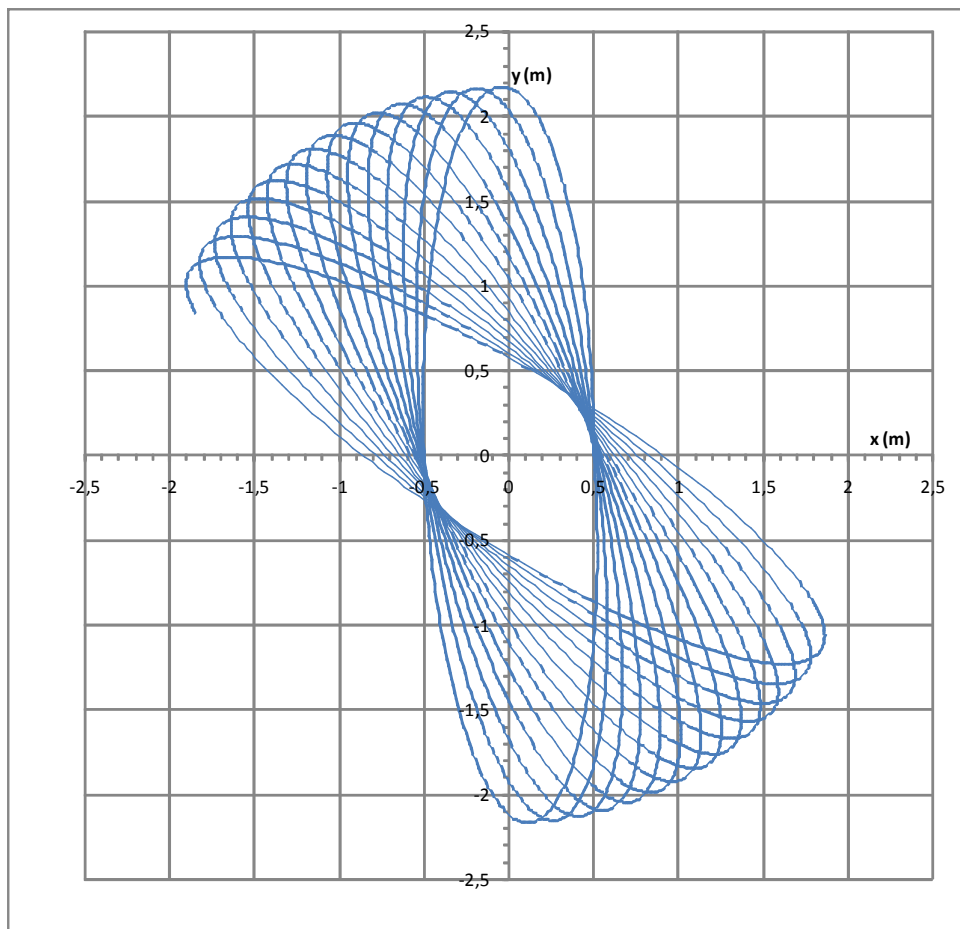
Rysunek 2. Tor ruchu ciała na sprężynce w przypadku  $b = 0,1 \text{ N/m}^2$

W przypadku  $b = 0,2 \text{ N/m}^2$  zgodnie z oczekiwaniami maksymalne wychylenie ciała jest mniejsze niż w przypadku  $b = 0,1 \text{ N/m}^2$ . Prędkość precesji jest w przybliżeniu dwukrotnie większa niż w poprzednim przypadku.



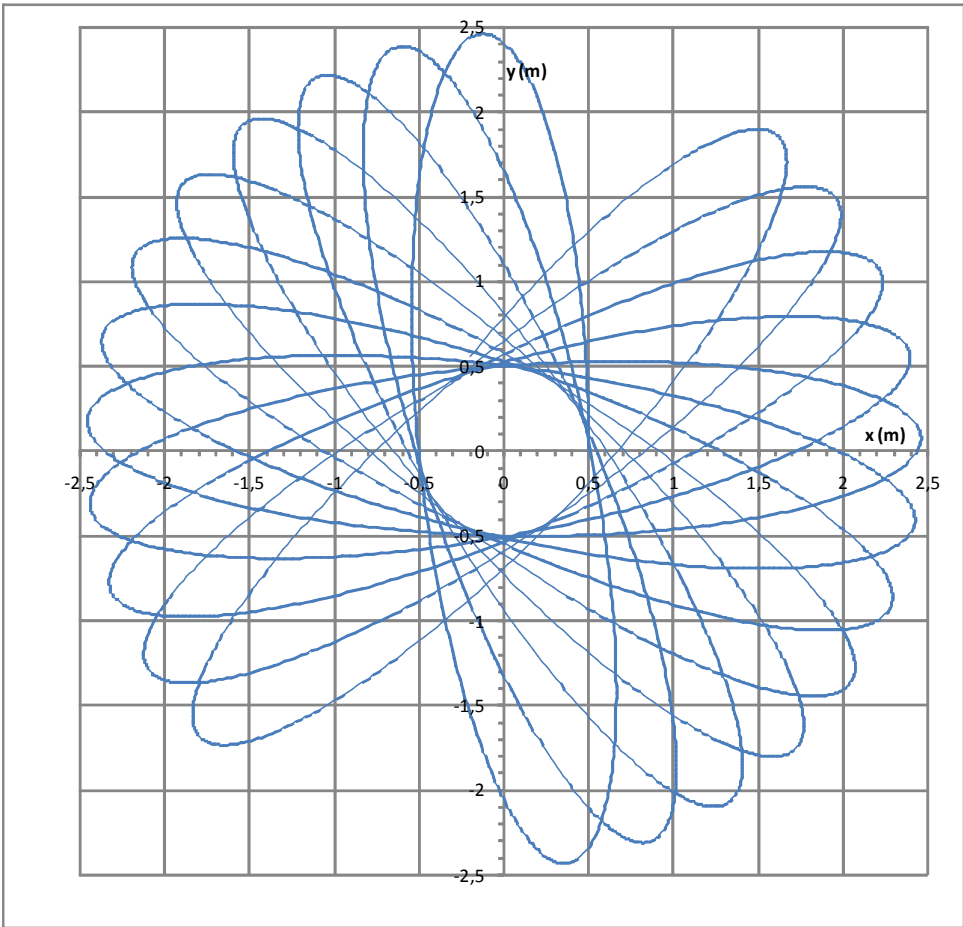
Rysunek 3. Tor ruchu ciała na sprężynie w przypadku  $b = 0,2 \text{ N/m}^2$

W przypadku  $b = -0,1 \text{ N/m}^2$  maksymalne wychylenie ciała jest większe niż w przypadku  $b = 0$  – przy tej samej odległości ciała od środka, siła przyciągająca ciało jest mniejsza. Precesja odbywa się w przeciwną stronę niż w przypadkach,  $b > 0$  a wartość bezwzględna jej prędkości jest zbliżona do prędkości precesji dla  $b = -0,1 \text{ N/m}^2$ .



Rysunek 4. Tor ruchu ciała na sprężynce w przypadku  $b = -0,1 \text{ N/m}^2$

W przypadku  $b = -0,2 \text{ N/m}^2$  zgodnie z oczekiwaniami maksymalne wychylenie ciała jest większe niż w przypadku  $b = -0,1$ , większa jest również wartość bezwzględna prędkości precesji. Ta wartość jest jednak znacząco większa niż w przypadku  $b = 0,2 \text{ N/m}^2$ .



Rysunek 5. Tor ruchu ciała na sprężynce w przypadku  $b = -0,2 \text{ N/m}^2$

**Punktacja zadania T4 (numerycznego)**

Równania ruchu klocka wraz z warunkami początkowymi – 1 pkt.

Układ równań różnicowych lub rekurencyjnych pozwalający na numeryczne wyznaczenie ruchu – 2 pkt.

Opis algorytmu oraz sposobu jego implementacji – 1 pkt.

Przedstawienie sposobu weryfikacji prawidłowości otrzymanych wykresów – 2 pkt.

Wykresy zgodne z przedstawionymi w rozwiązaniu wzorcowym – 3 pkt.

Dyskusja otrzymanych wyników - 1 pkt.

Uwaga: nie jest wymagane, aby rozwiązanie zawierało przejście do zmiennych bezwymiarowych.

Uwaga dla Komitetów Okręgowych:

Nie jest wymagane przedstawienie równań ruchu w postaci ((23)-(26)).