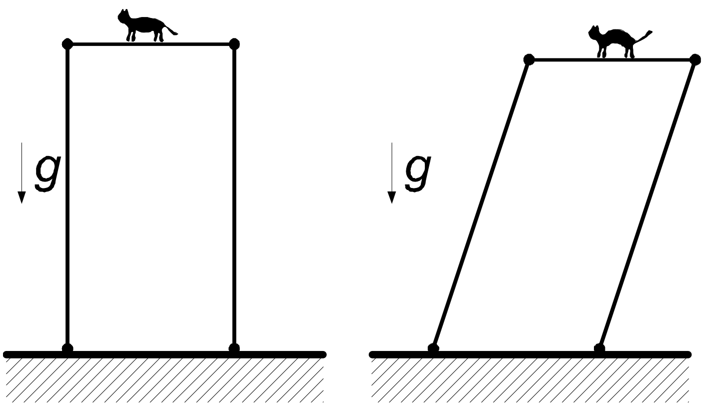
LXIV OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.



Rys. 1. Kot na przewracającym się rusztowaniu.

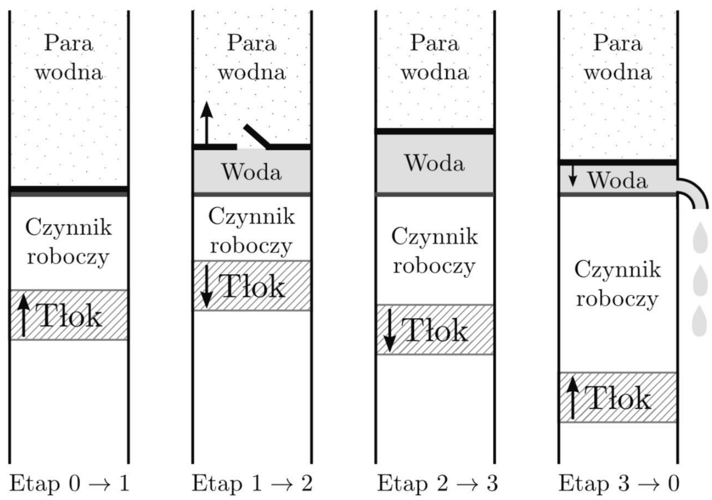
Rusztowanie składa się z początkowo pionowych, jednorodnych i cienkich rur o długości l każda. Górny koniec każdej rury jest połączony przegubowo z platformą o masie m; łączna masa rur wynosi M, a przyspieszenie ziemskie jest równe g. W pewnej chwili na platformę wszedł kot Fizol i wtedy rusztowanie zaczęło się przewracać, przy czym platforma pozostawała pozioma. Aby zminimalizować pionową składową prędkości, z jaką później uderzył w ziemię, Fizol w pewnym momencie podskoczył, tzn. odbił się od platformy, nadając sobie w bardzo krótkim czasie taką prędkość, że później, przy uderzeniu w ziemię, pionowa składowa jego prędkości była minimalna.

a) Podaj rozumowanie pozwalające stwierdzić, kiedy i jaką prędkość Fizol powinien sobie nadać.

b) Wyznacz wartość pionowej składowej prędkości Fizola w chwili zetknięcia z ziemią (lub już leżącą na ziemi platformą). Podaj wartość liczbową tej prędkości dla $l = 5$ m, $g = 10$ m/s^2 w przypadkach $m \ll M$ oraz $m \gg M$.

Stojące na ziemi końce rur rusztowania nie przesuwają się względem ziemi i nie odrywają się od niej. Pomiń wszelkie opory ruchu oraz przyjmij, że masa i rozmiary kota są zaniedbywalne. Kot nie trzyma się platformy – po prostu na niej stoi. Moment bezwładności cienkiej, jednorodnej rury o długości l i masie m_r względem osi prostopadłej do rury i przechodzącej przez jej koniec jest równy $\frac{1}{3}m_\mathrm{r}l^2$. Weź pod uwagę, że aby kot mógł się odbić, musi stykać się z platformą.

Zadanie 2.



Rys. 2. Schemat działania silnika. Pokazano jedynie fragment zbiornika z parą.

Skonstruowano samochód napędzany nasyconą parą wodną. Jego silnik składa się ze zbiornika i cylindra zamkniętego tłokiem (patrz rysunek). W zbiorniku znajduje się nasycona para wodna o ciśnieniu p_0 (równym ciśnieniu otoczenia) i temperaturze T_1. W cylindrze znajduje się N moli czynnika roboczego będącego gazem doskonałym. Temperatura otoczenia wynosi T_0. Silnik działa w następujący sposób:

etap $0 \to 1$: czynnik roboczy ulega adiabatycznemu sprężeniu, tak że jego temperatura wzrasta od T_0 do T_1.

etap $1 \to 2$: czynnik roboczy ulega izotermicznemu rozprężeniu pobierając przy tym ciepło od porcji pary wodnej o masie Δm. W wyniku tego procesu ta porcja pary ulega skropleniu. Ciśnienie i temperatura pary, która pozostała w zbiorniku nie ulega przy tym zmianie – objętość pary zostaje odpowiednio zmniejszona przez przesunięcie ruchomej ściany zbiornika.

etap 2 → 3: czynnik roboczy ulega rozprężeniu, przy czym pozostaje w stanie równowagi cieplnej z porcją wody powstałą w etapie 1 → 2. W trakcie tego procesu czynnik roboczy i woda pozostająca z nim w równowadze cieplnej są izolowane termicznie (adiabatycznie) od otoczenia. Pod koniec tego procesu temperatura czynnika roboczego i wody wynosi T_0.

etap 3 → 0: woda jest wylewana do otoczenia, a czynnik roboczy ulega izotermicznemu sprężaniu.

a) Wyznacz zależność między temperaturą T i objętością V czynnika roboczego w trakcie etapu 2 → 3.

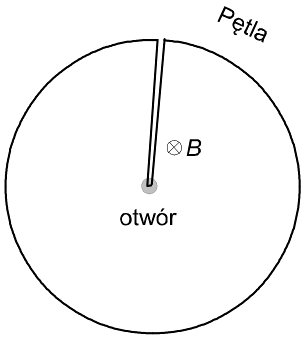
b) Wyznacz największą teoretycznie możliwą moc tego silnika, jeśli w ciągu czasu t zużywa on parę o masie m.

Ciepło parowania wody w temperaturze T_1 i pod ciśnieniem p_0 wynosi q. Przyjmij, że ciepło właściwe wody jest stałe i wynosi c_w. Molowe ciepło właściwe czynnika roboczego przy stałej objętości wynosi c_V.

Informacje, które mogą być przydatne:

- praca wykonywana przy izotermicznym rozprężaniu gazu doskonałego od objętości V_p do objętości V_k jest równa $NRT \ln \frac{V_\mathrm{k}}{V_\mathrm{p}}$
- w trakcie przemiany adiabatycznej gazu doskonałego zachodzi $T^{\frac{c_V}{R}} V = \mathrm{const}$, gdzie c_V jest molowym ciepłem właściwym tego gazu przy stałej objętości, a R – uniwersalną stałą gazową.
- $(\ln x)' = \frac{\mathrm{d} \ln x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$, $(x^p)' = \frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}x} = px^{p-1}$.

Zadanie 3.



Rys. 3. Pętla z przewodnika na stole.

Na gładkim stole leży pętla z cienkiego, wiotkiego i nieważkiego przewodu pokrytego warstwą izolacji. Zakrzywiony fragment pętli ma kształt okręgu o środku pokrywającym się z małym otworem w stole, a dwa fragmenty prostoliniowe leżą wzdłuż jednego z promieni tego okręgu – patrz rysunek. Całkowity opór elektryczny pętli wynosi R, a długość przewodu jest równa l. Układ znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B, skierowanym prostopadle do powierzchni stołu.

W chwili $t = 0$ pętlę chwycono za punkt leżący nad otworem i zaczęto wyciągać przez otwór ze stałą prędkością v.

Wyznacz zależność siły, z jaką wyciągano pętlę, od długości pozostałej na stole części przewodu.

Pomiń tarcie przewodu o krawędź otworu oraz pole magnetyczne wytwarzane przez ewentualny prąd płynący w drucie.

Rozwiązanie zadania 1.

a) W trakcie przewracania pionowa składowa przyspieszenia platformy wzrasta. Chwila, gdy jej wartość osiągnie wartość przyspieszenia ziemskiego (jeśli to nastąpi), jest ostatnią chwilą, w której kot styka się z platformą. W tej chwili kot powinien odbić się tak, by pionowa składowa jego prędkości względem ziemi stała się równa 0. Dalszy ruch kota będzie spadkiem swobodnym. (Wcześniejsze odbicie się kota oznacza spadek swobodny z większej wysokości, natomiast niezerowa pionowa składowa prędkości tuż po odbiciu prowadzi – zgodnie z zasadą zachowania energii – do większej prędkości w chwili uderzenia w ziemię.)

Jeśli pionowa składowa przyspieszenia platformy nie osiągnie g, Fizol powinien odbić się tuż przed uderzeniem platformy w ziemię. Formalnie może w ten sposób spowodować, że uderzy w ziemię z zerową prędkością.

b) Z punktu widzenia równań ruchu układ jest równoważny jednej rurze o masie M i długości l z przymocowaną punktową masą m na górnym końcu. Możemy przyjąć, że ten koniec znajduje się w miejscu, gdzie stoi kot. Przyspieszenie kątowe ε rozważanej rury jest określone przez równanie ruchu obrotowego

$$I\varepsilon = (Ml/2 + ml)\, g \cos\alpha, \tag{1}$$

gdzie $I = ml^2 + Ml^2/3$ jest jej momentem bezwładności względem osi obrotu, natomiast α jest kątem, jaki ta rura tworzy z poziomem. Uwzględniając przyspieszenie dośrodkowe, pionowa składowa przyspieszenia górnego końca rury (a zatem też platformy) wynosi

$$a_y = \varepsilon l \cos\alpha + \frac{v^2}{l}\sin\alpha \tag{2}$$

gdzie v jest jej prędkością, którą można wyznaczyć z zasady zachowania energii

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{v}{l}\right)^2 = Mg\left(\frac{l}{2} - \frac{h}{2}\right) + mg\,(l-h)\,, \tag{3}$$

gdzie $h = l\sin\alpha$. W powyższym wzorze wykorzystaliśmy to, że dla danego h środek ciężkości rur obniżył sie o $\frac{l}{2} - \frac{h}{2}$, natomiast środek ciężkości platformy obniżył się o $l - h$.

Zatem

$$a_y = \frac{M/2 + m}{I/l^2}\left[\cos^2\alpha + 2\,(1 - \sin\alpha)\sin\alpha\right] g = \tag{4}$$

$$= \frac{M/2 + m}{I/l^2}\left[1 - h^2/l^2 + 2\,(1 - h/l)\cdot h/l\right] g. \tag{5}$$

W chwili oderwania powinno być $a_y = g$, stąd wysokość h_0 przy której nastąpi oderwanie, spełnia warunek

$$\frac{M/2 + m}{I/l^2}\left[1 - h_0^2/l^2 + 2\,(1 - h_0/l)\cdot h_0/l\right] = 1, \tag{6}$$

czyli oznaczając $z = h_0/l$

$$3z^2 - 2z + \left(\frac{I/l^2}{M/2 + m} - 1\right) = 0. \tag{7}$$

Oznaczając przez z_0 dodatni pierwiastek powyższego równania, równy

$$z_0 = \frac{1 + \sqrt{4 - 3\frac{I/l^2}{M/2+m}}}{3}, \tag{8}$$

otrzymamy $h_0 = l \cdot z_0$.

Dla $M \gg m$ mamy $\frac{I/l^2}{M/2+m} = \frac{2}{3}$, co daje $z_0 = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

Dla $M \ll m$ mamy $\frac{I/l^2}{M/2+m} = 1$, co daje $z_0 = \frac{2}{3}$.

Dalszy ruch kota jest spadkiem swobodnym z wysokości h_0, zatem z zasady zachowania energii, pionowa składowa prędkości kota tuż przed uderzeniem w ziemię wynosi

$$v_{\mathrm{ky}} = \sqrt{2gh_0} = \tag{9}$$

$$= \sqrt{2gl\frac{1 + \sqrt{4 - 3\frac{I/l^2}{M/2+m}}}{3}}. \tag{10}$$

W szczególnych przypadkach dla $l = 5$ m otrzymujemy

$$v_{\mathrm{ky}} = \begin{cases} 9{,}0 \text{ m/s} & \text{dla } M \gg m \\ 8{,}2 \text{ m/s} & \text{dla } M \ll m \end{cases} \tag{11}$$

Zauważmy, że przy spadku swobodnym z tej wysokości kot osiągnąłby prędkość 10 m/s.

Punktacja zadania 1.

a) Prawidłowe określenie momentu odbicia oraz prędkości uzyskanej w wyniku odbicia, wraz z uzasadnieniem – 3 pkt.

b)

Równanie ruchu obrotowego (wzór (1) lub równoważny) – 1 pkt.

Pionowa skladowa przyspieszenia platformy (wzór (2) lub równoważny) – 1 pkt.

Wykorzystanie zasady zachowania energii do wyznaczenia prędkości platformy (wzór (2) lub równoważny) – 1 pkt.

Poprawny, jawny warunek pozwalający wyznaczyć wysokość, na której kot przestaje się stykać z platformą (wzór (6) lub równoważny) – 1 pkt.

Prędkość kota w chwili uderzenia w ziemię wyrażona przez h_0 (wzór (2) lub równoważny) – 1 pkt.

Poprawny wynik końcowy na prędkość kota w chwili uderzenia w ziemię, wyrażony przez parametry podane w treści zadania (wzór (10) lub równoważny) – 1 pkt.

Wyniki liczbowe otrzymane przez podstawienie do poprawnego wzoru (11) – 1 pkt.

Rozwiązanie zad 2

a) W trakcie zwykłej przemiany adiabatycznej gazu doskonałego zachodzą związki:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U &= -p\mathrm{d}V && \text{(zasada zachowania energii, I zasada termodynamiki)},\\ pV &= NRT && \text{(równanie stanu gazu doskonałego)},\\ \mathrm{d}U &= Nc_V\mathrm{d}T && \text{(zmiana energii wewnętrznej gazu doskonałego,}\\ &&& \quad\text{wyrażona przez zmianę temperatury)}, \end{aligned}$$

gdzie U jest energią wewnętrzną gazu, natomiast $\mathrm{d}V$, $\mathrm{d}T$, $\mathrm{d}U$ są małymi zmianami odpowiednio objętości, temperatury i energii wewnętrznej. Zgodnie ze wskazówką związki te prowadzą do równania $T^{\frac{c_V}{R}}V = \mathrm{const}$ W przemianie $2 \to 3$ gaz jest w stałym kontakcie termicznym z porcja wody, zatem powyższe równania zostaną nieco zmodyfikowane

$$\begin{aligned} \mathrm{d}U_{\mathrm{c}} &= -p\mathrm{d}V,\\ pV &= NRT\ ,\\ \mathrm{d}U_{\mathrm{c}} &= (Nc_V + \Delta m c_{\mathrm{w}})\,\mathrm{d}T, \end{aligned}$$

gdzie U_{c} jest sumą energii wewnętrznych gazu i porcji wody.

Zatem w przemianie $2 \to 3$ obowiązuje równanie

$$T^{\frac{c_{\mathrm{c}}}{R}}V = \mathrm{const}, \tag{12}$$

gdzie $c_{\mathrm{c}} = c_V + \frac{\Delta m}{N}c_{\mathrm{w}}$.

b)

$0 \to 1$: zgodnie z zasadą zachowania energii praca wykonana na tym etapie przez czynnik roboczy wynosi $W_{0\to 1} = Nc_v\,(T_0 - T_1)$, a z równania adiabaty mamy $T_0^{\frac{c_V}{R}}V_0 = T_1^{\frac{c_V}{R}}V_1$

$1 \to 2$: ponieważ na tym etapie energia wewnętrzna gazu nie ulega zmianie, praca przez niego wykonana jest równa pobranemu ciepłu, czyli $W_{1\to 2} = \Delta m\ q = NRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$.

$2 \to 3$: z zasady zachowania energii praca wykonana na tym etapie przez czynnik roboczy wynosi $W_{2\to 3} = (Nc_v + \Delta m\ c_w)\,(T_1 - T_0)$, a z punktu a) mamy $T_1^{\frac{c_c}{R}}V_2 = T_0^{\frac{c_c}{R}}V_3$,

$3 \to 0$: ponieważ na tym etapie energia wewnętrzna gazu nie ulega zmianie, praca przez niego wykonana jest równa oddanemu ciepłu, czyli $W_{3\to 0} = -Q_{\mathrm{oddane}} = NRT_0 \ln\frac{V_0}{V3}$.

Z równań adiabat

$$\ln\frac{V_0}{V_3} + \left(\frac{c_V + R}{R} - \frac{c_{\mathrm{c}} + R}{R}\right)\ln T_0 = \ln\frac{V_1}{V_2} + \left(\frac{c_V + R}{R} - \frac{c_{\mathrm{c}} + R}{R}\right)\ln T_1.$$

Całkowita praca wykonana przez gaz w ciągu jednego cyklu wynosi

$$\begin{aligned} W &= NRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + NRT_0 \ln \frac{V_0}{V_3} + \Delta m\; c_{\mathrm{w}}\,(T_1 - T_0) \\ &= NRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + NRT_0 \left[\ln \frac{V_1}{V_2} - \frac{c_{\mathrm{w}1}}{R} \ln \frac{T_1}{T_0} \right] + \Delta m\; c_{\mathrm{w}}\,(T_1 - T_0) \\ &= \Delta m\; q \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) + \Delta m\; c_{\mathrm{w}} \left(T_1 - T_o - T_0 \ln \frac{T_1}{T_0} \right). \end{aligned}$$

Zatem moc silnika jest równa

$$P = \frac{m}{t} \left[q \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) + c_{\mathrm{w}} \left(T_1 - T_0 - T_0 \ln \frac{T_1}{T_0} \right) \right]. \tag{13}$$

II wersja rozwiązania punktu b).

Zauważmy, że największa teoretycznie możliwa moc tego silnika odpowiada sytuacji, gdy wszystkie procesy są odwracalne, i nie zależy od szczegółów działania silnika.

Silnik Carnota działający między parą (powodujący jej skroplenie) a otoczeniem ma moc

$$P_1 = \frac{m}{t} q \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right). \tag{14}$$

Chłodząc wodę od temperatury T do temperatury $T+\ \mathrm{d}T$ (gdzie dT jest ujemne) przy pomocy (innego) silnika Carnota, uzyskamy pracę

$$\mathrm{d}W = -\left(1 - \frac{T_0}{T} \right) \mathrm{d}U = -\left(1 - \frac{T_0}{T} \right) \Delta m c_{\mathrm{w}} \mathrm{d}T. \tag{15}$$

Zatem chłodząc wodę od T_1 do T_0, uzyskamy pracę

$$W_1 = \Delta m\; c_{\mathrm{w}} \left(T_1 - T_0 - T_0 \ln \frac{T_1}{T_0} \right). \tag{16}$$

Uwzględniając (14) oraz (16) otrzymamy, że maksymalna teoretyczna moc silnika wynosi

$$P = \frac{m}{t} \left[q \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) + c_{\mathrm{w}} \left(T_1 - T_o - T_0 \ln \frac{T_1}{T_0} \right) \right]. \tag{17}$$

Punktacja zadania 2.

a) Równanie (12) lub równoważne wraz z uzasadnieniem – 3 pkt.

b) - Wersja, w której rozważane są kolejne etapy cyklu

Związki między parametrami gazu oraz praca wykonana na każdym z etapów cyklu – 1 pkt (w sumie dla czterech etapów 4 pkt)

Maksymalna teoretyczna moc silnika (wzór (13)) – 3 pkt.

b) - Wersja wykorzystująca silnik Carnota

Zauważenie, że zamiast rozważać procesy opisane treści zadania, można rozważyć silniki Carnota dające taki sam efekt końcowy: jeden skraplający parę, a drugi chłodzący wodę (lub rozważania równoważne) – 2 pkt.

Moc wynikająca ze skraplania pary (wzór (14)) – 2 pkt.

Praca uzyskana w trakcie chłodzenia wody o dT (wzór (15)) – 1 pkt.

Całkowita praca uzyskana w trakcie chłodzenia wody (wzór (16)) – 1 pkt.

Wynik końcowy (wzór (17)) – 1 pkt.

Rozwiązanie zad 3.

Oczekujemy, że wyciąganie przewodu spowoduje zmniejszanie powierzchni ograniczonej przez pętlę. Ponieważ pętla znajduje się w polu magnetycznym, to zgodnie z prawem Faradaya powodowałoby to przepływ prądu w pętli. Wytworzona siła elektrodynamiczna działałaby prostopadle do przewodu (w płaszczyźnie stołu) tak, by zwiększyć powierzchnię ograniczoną przez pętlę. Ponieważ jednak przewód jest nieważki, taka siła powodowałaby nieskończone przyspieszenie danego fragmentu drutu powodujące zwiększenie powierzchni ograniczonej przez pętlę. Zatem dla nieważkiego drutu, tak długo jak to jest możliwe, powierzchnia ograniczona przez pętlę nie ulegnie zmianie, a kształt niewyciągniętej części przewodu będzie coraz bardziej zbliżony do okręgu. Ponieważ początkowa powierzchnia ograniczona przez pętlę wynosi $\pi\left(\frac{l}{2+2\pi}\right)^2$ z takim przypadkiem będziemy mieli do czynienia do momentu, gdy pozostała na stole część przewodu będzie miała długość l_1 gdzie l_1 spełnia warunek: $\pi\left(\frac{l_1}{2\pi}\right)^2 = \pi\left(\frac{l}{2+2\pi}\right)^2$, czyli

$$l_1 = \frac{\pi}{1+\pi} l. \tag{18}$$

W następnych chwilach czasu drut będzie tworzył okrąg o promieniu $r = \frac{l_x}{2\pi}$, gdzie l_x jest długością pozostałego na stole drutu. Szybkość zmian tego promienia będzie wynosić $\dot{r} = v/\pi$.

Strumień pola B przez powyższy okrąg wynosi $\pi r^2 B$. Z prawa Faradaya siła elektromotoryczna w obwodzie wynosi

$$\mathcal{E} = 2\pi r B \dot{r} = 2rBv, \tag{19}$$

natężenie prądu jest równe

$$I = 2rBv/R, \tag{20}$$

a siła elektrodynamiczna na jednostkę długości przewodu $f = BI$. Ta siła działa jak rodzaj ciśnienia – jest prostopadła do danego fragmentu przewodu i skierowana na zewnątrz pętli. Aby się jej przeciwstawić, należy ciągnąć przewód z siłą

$$F = 2r\ f = 4r^2 B^2 v/R. \tag{21}$$

Zatem mamy ostatecznie

$$F = 0 \ \ \text{dla } l_x > \frac{\pi}{1+\pi} l, \tag{22}$$

$$F = \frac{1}{\pi^2}\frac{B^2 v}{R} l_x^2 \ \ \text{dla } 0 \le l_x \le \frac{\pi}{1+\pi} l. \tag{23}$$

Punktacja zadania 3.

Zauważenie, że w początkowym etapie wyciągania nie trzeba działać siłą, a kształt pozostałej na stole cześci drutu będzie coraz bardziej zbliżony do okręgu – 2 pkt.

Graniczna długość przewodu (wzór (18)) – 1 pkt.

Siła elektromotoryczna (wzór (19)) – 1 pkt.

Prąd płynący w petli (wzór (20)) – 1 pkt.

Siła z jaką trzeba wyciągać pętlę (wzór (21)) wyrażona przez rozmiar pętli na stole – 2 pkt.

Wzór końcowy (wzory (22) - (23)) – 3 pkt.