LXV OLIMPIADA FIZYCZNA

ZAWODY III STOPNIA

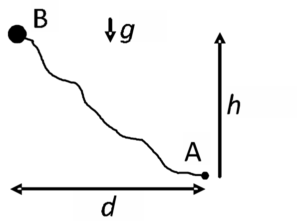
CZĘŚĆ TEORETYCZNA

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 20 punktów.

Zadanie 1.

Mały ciężarek o masie m jest przymocowany do końca lekkiej, wiotkiej nici, której drugi koniec jest zamocowany nieruchomo w punkcie A. Długość swobodna nici wynosi l, jej maksymalne względne wydłużenie wynosi p, gdzie $p \ll 1$, a maksymalna siła napięcia (wytrzymałość) jest równa F_{max}. W całym zakresie wydłużeń spełniona jest proporcjonalność wydłużenia do siły (prawo Hooke'a).

Niech B będzie punktem, którego odległość od punktu A nie przekracza długości nienapiętej nici, a położenie w pionie względem punktu A wynosi h, przy czym $h > 0$ oznacza położenie powyżej punktu A. Odległość w poziomie między punktami A i B jest równa d.



Rys. do zad. 1: ciężarek na nitce

Ciężarek został upuszczony z punktu B. Droga przebyta przez ciężarek w czasie swobodnego spadku była znacznie większa od drogi przebytej podczas napinania nici. Nić zerwała się przy pierwszym rozciągnięciu.

Podaj warunek, jaki musiały spełniać parametry m, p, F_{max}, d, l oraz przyspieszenie grawitacyjne g, aby opisane zdarzenie było możliwe, oraz – dla ustalonych wartości tych parametrów – minimalną wartość h_{min} wysokości, z jakiej upuszczono ciężarek.

Opór powietrza należy pominąć.

Zadanie 2.

Źródło dźwięku harmonicznego porusza się ruchem jednostajnym po okręgu o promieniu R z prędkością mniejszą od prędkości v_{d} dźwięku w ośrodku, ale porównywalną z nią. Częstotliwość dźwięku jest znacznie większa od częstotliwości krążenia źródła. Nieruchomy mikrofon znajduje się w odległości większej niż R od środka okręgu, po którym porusza się źródło, w płaszczyźnie tego okręgu. W chwili $t = 0$ odebrano dźwięk o największej częstotliwości, a najbliższy następujący po nim dźwięk o najmniejszej częstotliwości odebrano w chwili $t = \Delta t$. Średnia arytmetyczna najwyższej i najniższej częstotliwości dźwięku odbieranego przez mikrofon wynosi f_{a}. Średnia częstotliwość odbieranego dźwięku, określona jako pole pod wykresem zależności tej częstotliwości od czasu podzielone przez czas, w przedziale od $t = 0$ do $t = \Delta t$ wynosi f_{b}.

Wyznacz chwilę, w której odbierana częstotliwość będzie równa dokładnie f_{b}. Rozważ tylko chwile z przedziału od $t = 0$ do $t = \Delta t$.

Podaj wartości liczbowe częstotliwości wysyłanego dźwięku, prędkości źródła, oraz poszukiwanej chwili dla $f_{\mathrm{a}} = 11 \cdot 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$, $f_{\mathrm{b}} = 9 \cdot 10^3\ \mathrm{s}^{-1}$, $R = 100$ m, $v_{\mathrm{d}} = 340$ m/s, $\Delta t = 1$ s.

Zadanie 3 na następnej stronie.

Rozwiązanie zadania 1

Ruch ciężarka możemy podzielić na dwa etapy:

- Spadek swobodny do momentu, gdy odległość ciężarka od punktu A będzie równa l. Na końcu tego etapu ciężarek ma pionowo w dół skierowaną prędkość v_1, którą możemy wyznaczyć korzystając z zasady zachowania energii

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mg\left(h + \sqrt{l^2 - d^2}\right), \tag{1}$$

gdzie $h + \sqrt{l^2 - d^2}$ jest odległością (w pionie) jaką przebył ciężarek. Stąd otrzymujemy

$$v_1 = \sqrt{2g\left(h + \sqrt{l^2 - d^2}\right)}. \tag{2}$$

- Rozciąganie nici do momentu ewentualnego zerwania. Początkową pionową prędkość v_1 w tym etapie możemy rozłożyć na składowe: v_{1r} – styczną do nici oraz $v_{1\perp}$– prostopadłą do nici. Z rozważań geometrycznych otrzymujemy

$$v_{1r} = \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{l}v_1, \tag{3}$$

$$v_{1\perp} = \frac{d}{l}v_1. \tag{4}$$

Ponieważ droga przebyta przez ciężarek w czasie swobodnego spadania jest znacznie większa od drogi przebytej w trakcie napinania nici, możemy pominąć efekty grawitacji w tym procesie (w jego trakcie zmiana energii grawitacyjnej jest mała w porównaniu z energią kinetyczna ciężarka na początku tego procesu). Ten sam warunek oznacza, że przemieszczenie ciężarka w trakcie napinania jest małe w porównaniu z l, dzięki czemu można pominąć zmianę kierunku siły napięcia nici w trakcie jej napinania.

Przy tych przybliżeniach ruch ciężarka jest złożeniem ruchu harmonicznego wzdłuż nici oraz ruchu jednostajnego wzdłuż osi prostopadłej do nici, a napięcie i ewentualne zerwanie nici wynika tylko z ruchu wzdłuż niej. W trakcie napinania nici składowa prędkości skierowana wzdłuż nici maleje kosztem wzrostu energii sprężystości. Nić się zerwie, jeśli związana z tą składową część energii kinetycznej będzie większa od maksymalnej energii sprężystości $F_{\max}pl/2$. Oznacza to, że zerwanie zajdzie jeśli

$$\frac{m}{2}v_{1r}^2 > \frac{1}{2}F_{\max}pl, \tag{5}$$

czyli dla

$$2m\left(1 - \frac{d^2}{l^2}\right)g\left(h + \sqrt{l^2 - d^2}\right) > F_{\max}pl. \tag{6}$$

To daje minimalną wysokość h powyżej której nastąpi zerwanie

$$h_{\min} = \frac{F_{\max}pl}{2mg\left(1 - \frac{d^2}{l^2}\right)} - \sqrt{l^2 - d^2}. \tag{7}$$

Ponieważ $h \leq \sqrt{l^2 - d^2}$, warunkiem na to, by do zerwania mogło dojść jest

$$\frac{F_{\max}p}{4mg\left(1 - \frac{d^2}{l^2}\right)^{3/2}} < 1. \tag{8}$$

Punktacja zadania 1.

Prędkość ciężarka w chwili rozpoczęcia rozciągania (wzór (2)) lub wyrażenie równoważne – 2 pkt.

Jawne podanie warunków przybliżenia (pominięcie grawitacji i zmiany kierunku siły napięcia nici w trakcie jej napinania) – 2 pkt.

Warunek zerwania nici w postaci niejawnej (wzór (5) lub równoważny) – 2 pkt.

Wzór na $h_{\min}$ (wzór (7)) – 2 pkt.

Warunek zerwania nici (wzór (8)) – 2 pkt.