

LXVI OLIMPIADA FIZYCZNA — ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

Rozwiązania zadań I stopnia należy przysyłać do **Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej** w terminach: część I — do 14 października b.r., część II — do 18 listopada b.r. O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II.

Przed wysłaniem rozwiązań prosimy o zarejestrowanie się na stronie internetowej <http://www.kgof.edu.pl/rejestracja>.

Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć na stronie internetowej <http://www.kgof.edu.pl>.

Krótką informacją na temat poprawnej redakcji rozwiązań zadań Olimpiady Fizycznej

Zadania powinny być rozwiązane jasno, przejrzysto i czytelnie. Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce papieru. Poszczególne etapy rozumowania należy opisać, a wszelkie zależności fizyczne, które nie są wprost podane w podręcznikach szkolnych – udowodnić. Należy również objaśnić wszelkie oznaczenia występujące w rozwiązaniach zadań. Rysunki mogą być wykonane odrębnie – muszą być jednak przejrzyste i czytelne oraz dobrze opisane w tekście.

Rozumowanie przedstawione w rozwiązaniach nie może zawierać luk logicznych. Każdy krok rozumowania powinien być zwięźle opisany, a przyjęte założenia – klarownie uzasadnione. Rozwlekłość jest uznawana za ujemną cechę pracy.

Rozwiązanie zadania teoretycznego powinno być poprzedzone analizą problemu poruszanego w zadaniu, a zakończone dyskusją wyników. Rozwiązania zadań teoretycznych powinny odnosić się do ogólnej sytuacji opisanej w treści, dane liczbowe (o ile zostały podane) powinny być podstawione dopiero do ostatecznych wzorów.

W zadaniach doświadczalnych należy wyraźnie rozgraniczyć części teoretyczną i doświadczalną. Część teoretyczna zadania doświadczalnego powinna zawierać analizę problemu wraz z wyprowadzeniem niezbędnych wzorów (o ile nie ma ich wprost w podręcznikach szkolnych) oraz sugestie metody doświadczalnej. Część doświadczalna powinna zawierać m.in. opis układu doświadczalnego ilustrowany rysunkiem, opis wykonanych pomiarów, wyniki pomiarów, analizę czynników mogących wpływać na wyniki (jak np. rozpraszanie energii lub opory wewnętrzne mierników), opracowanie wyników wraz z dyskusją niepewności pomiarowych. Wykresy do zadania doświadczalnego powinny być starannie wykonane, najlepiej na papierze milimetrowym. Ocenie podlegają wyłącznie elementy rozwiązania opisane w pracy. W zadaniach doświadczalnych osobno oceniana jest część teoretyczna i część doświadczalna.

W rozwiązaniach można posługiwać się dowolnym układem jednostek, chyba że tekst zadania mówi wyraźnie inaczej.

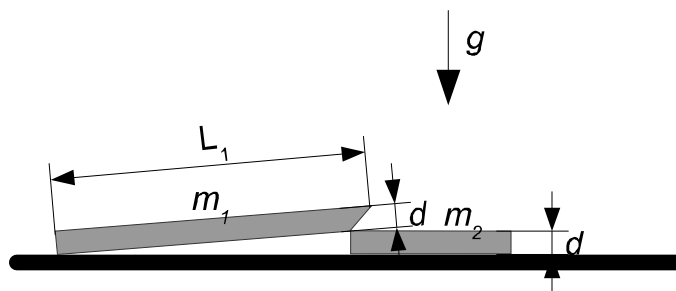
CZEŚĆ II (termin wysyłania rozwiązań — 18 listopada 2016 r.)

Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić identyfikator otrzymany w trakcie rejestracji oraz nazwisko i imię autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać adres e-mail autora pracy oraz nazwę i adres szkoły. Osoby, które chcą być poinformowane listownie o wynikach kwalifikacji, do pracy powinny dołączyć zaadresowaną do siebie kopertę z naklejonym znaczkiem.

ZADANIA TEORETYCZNE

Należy przesłać rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

Zadanie T1



Rys. 1. Stan początkowy rozważanego układu desek. Rysunek nie uwzględnia faktu, że pierwsza deska jest długa.

Deska o masie m_1 , długości L_1 oraz grubości d , gdzie $L_1 \gg d$, ma jeden koniec ścięty pod kątem 45° . Deska ta jest początkowo oparta o drugą deskę o grubości również d i masie m_2 , spoczywającą na poziomym stole – tak jak przedstawiono to na rysunku.

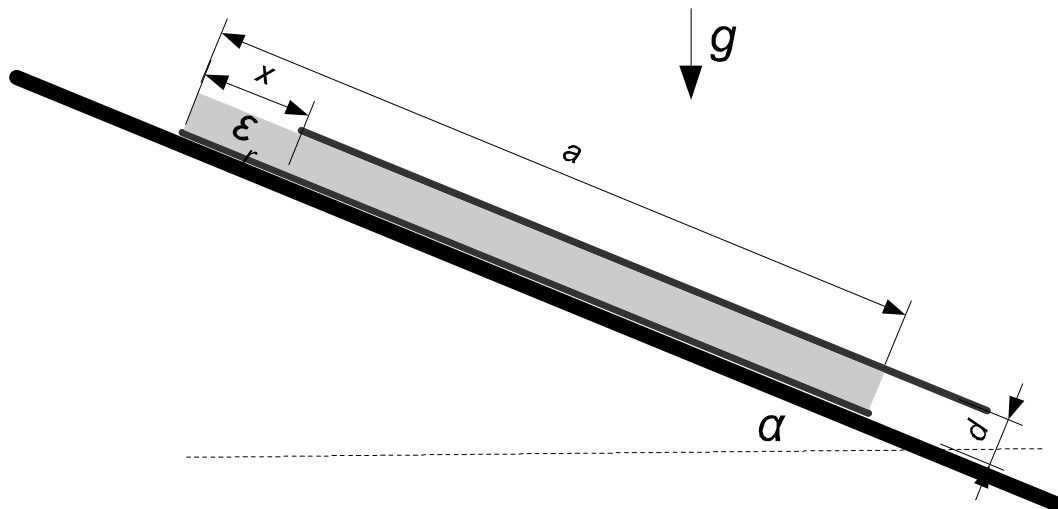
Wyznacz końcową prędkość drugiej deski.

Pomiń tarcie i inne opory ruchu.

Moment bezwładności cienkiego pręta o długości l i masie m względem osi prostopadłej do niego i przechodzącej przez jego środek masy wynosi $\frac{1}{12}ml^2$.

Zadanie T2

Kondensator płaski składa się z dwóch prostokątnych metalowych okładek o wymiarach $a \times b$, między którymi znajduje się jednorodny dielektryk o stałej dielektrycznej równej ϵ_r . Odległość między okładkami wynosi d , przy czym $d \ll a$ oraz $d \ll b$. Kondensator naładowano pewnym ładunkiem i położono na równi pochyłej o kącie nachylenia α , tak że krawędzie b są poziome. Górna okładka kondensatora nie jest przymocowana i może ślizgać się bez tarcia po dielektryku. W stanie równowagi ta okładka była przesunięta względem dolnej okładki i dielektryka o x , przy czym $x \gg d$ – patrz rysunek.



Rys. 2. Kondensator na równi pochyłej

Wiedząc, że masa górnej okładki wynosi m , wyznacz ładunek, którym był naładowany kondensator.

Pomiń możliwość przechylenia się górnej okładki dla $x > a/2$.

Dolna okładka i dielektryk są nieruchome względem równi.

Jako wskazówkę możesz wykorzystać rozwiązanie zadania 3. z finału LXV Olimpiady Fizycznej.

Zadanie T3

Część klimatyzatorów ma możliwość pracy w trybie grzania, gdy otoczenie budynku jest zimniejsze od jego wnętrza. W tym trybie klimatyzator działa jako pompa ciepła: pobiera ciepło z otoczenia, chłodząc powietrze na zewnątrz, i oddaje ciepło do ogrzewanego pomieszczenia, pobierając przy tym energię elektryczną (jego elementy wykonują w tym procesie pracę). Rozważmy pracujący w tym trybie klimatyzator, którego moc grzania wynosi P_G . W skali Celsjusza temperatura zewnętrznych elementów klimatyzatora (chłodnicy) wynosi t_z , a temperatura elementów wewnętrznych (grzałki) to t_w .

a) Wyznacz minimalną moc elektryczną P_C potrzebną do ogrzewania tego pomieszczenia przy założeniu największej teoretycznie możliwej efektywności.

b) Rzeczywista zużywana przez klimatyzator moc elektryczna P_R jest większa niż P_C . Przyjmijmy, że nadmiar mocy $P_R - P_C$ jest w całości zamieniany na ciepło i ogrzewa pomieszczenie (czyli jest częścią P_G). Wyznacz, jaka jest szybkość przepływu powietrza J przez zewnętrzny element klimatyzatora, przy założeniu, że to przepływające powietrze jest chłodzone od temperatury (w skali Celsjusza) otoczenia t_{ot} do temperatury zewnętrznych elementów klimatyzatora t_z . Ciśnienie zewnętrzne wynosi p_{ot} . Przyjmij, że powietrze jest gazem doskonałym o molowym cieple właściwym przy stałej objętości równym $\frac{5}{2}R$, gdzie R jest uniwersalną stałą gazową. Przez szybkość przepływu powietrza rozumiemy objętość powietrza wypływającego w jednostce czasu z zewnętrznego elementu klimatyzatora.

Wyznacz wartości liczbowe P_C oraz J dla $P_G = 3 \text{ kW}$, $P_R = 1,5 \text{ kW}$, $t_w = 35^\circ\text{C}$, $t_z = -20^\circ\text{C}$, $t_{ot} = -10^\circ\text{C}$, $p_{ot} = 10^5 \text{ Pa}$. Uniwersalna stała gazowa $R = 8,3 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$.

Zadanie T4 – numeryczne

Jednym z klasycznych zagadnień mechaniki jest problem znalezienia krzywej najkrótszego spadku – brachistochrony. W tym zadaniu będziemy badali podobne zagadnienie dla ograniczonej klasy krzywych, ale z uwzględnieniem oporu powietrza.

Rozważmy ciało materialne mogące poruszać się bez tarcia po paraboli $y = ax^2 + bx + c$ od punktu $x = 0, y = 0$ do punktu $x = x_1, y = y_1$ (może to być np. koralik nanizany na drut). Ciało znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym o natężeniu g skierowanym przeciwnie do zwrotu osi y . Prócz grawitacji oraz siły reakcji więzów, gwarantującej, że ciało pozostaje na rozważanej paraboli, działa na nie siła oporu, skierowana przeciwnie do prędkości. Wartość tej siły wynosi

$$F_{\text{op}} = \beta v^2,$$

gdzie β jest stałą, a v – prędkością ciała. Początkowa prędkość ciała (w punkcie $(0, 0)$) jest równa 0.

Przyjmując $g = 10 \text{ m/s}^2$, $x_1 = 100 \text{ m}$, $y_1 = -1 \text{ m}$ i oznaczając przez m masę rozważanego ciała, wyznacz wartość parametru a , dla której czas przemieszczania się rozważanego ciała od $(0, 0)$ do (x_1, y_1) jest najkrótszy, dla $\beta/m = 0$, $\beta/m = 0,0001 \frac{1}{\text{m}}$, $\beta/m = 0,001 \frac{1}{\text{m}}$ oraz $\beta/m = 0,01 \frac{1}{\text{m}}$. Dla porównania wyznacz również czas przemieszczania się tego ciała od $(0, 0)$ do (x_1, y_1) po prostej (tzn. w przypadku $a = 0$).

Niepewność otrzymanych czasów nie powinna być większa niż 0,2 s.

Wskazówki

Długość fragmentu rozważanej paraboli od x do $x + \Delta x$, gdzie Δx jest małe, jest w przybliżeniu równa $\Delta s = \sqrt{1 + (y')^2} \Delta x$, gdzie y' jest pochodną y względem x .

Wartości parametrów b, c są określone przez a, x_1, y_1 .

Uwaga:

Rozwiązanie powinno zawierać:

- (i) wzory używane w rozwiązaniu wraz z wyprowadzeniem lub uzasadnieniem;
- (ii) opis zastosowanego algorytmu;
- (iii) opis kodu programu (lub np. arkusza kalkulacyjnego) użytego do rozwiązania wraz z sposobem zagwarantowania (lub sprawdzenia) właściwej dokładności wyników;
- (iv) tabelę wartości liczbowych, o których mowa w treści zadania (dla każdego β/m wartość a , minimalnego czasu, oraz czasu dla ruchu po prostej);
- (v) jakościowe omówienie otrzymanych wyników.

Nie jest dopuszczalne użycie programów do obliczeń symbolicznych lub gotowych programów wyznaczających poszukiwany czas po podaniu toru.

Dodatkowe wskazówki dotyczące rozwiązywania zadań numerycznych znajdziesz w treściach i rozwiązaniach zadań numerycznych z poprzednich olimpiad.

Rozwiązanie zadania T1

Oznaczmy przez v_1 oraz v_2 poziome składowe prędkości odpowiednio pierwszej i drugiej deski, a przez v_y pionową składową prędkości końca pierwszej deski, wszystkie te prędkości w chwili uderzenia pierwszej deski o stół. Ponieważ nie ma tarcia, v_2 jest równe szukanej końcowej prędkości drugiej deski.

Aż do uderzenia pierwszej deski o stół jej ukośna ściana styka się z górną krawędzią drugiej deski. Ponieważ $L_1 \gg d$, kąt tej ściany deski względem pionu jest w przybliżeniu stale równy 45° . Oznacza to, że spełniony jest warunek

$$v_y = v_2 - v_1. \quad (1)$$

Ponieważ nie ma tarcia, pozioma składowa pędu układu jest zachowana i równa 0, gdyż na początku żadna z desek się nie poruszała

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0. \quad (2)$$

Również z powodu braku tarcia aż do momentu uderzenia pierwszej deski w stół spełniona jest zasada zachowania energii – początkowa energia układu jest równa energii końcowej

$$\frac{m_1 g d}{2} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{v_y}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \quad (3)$$

gdzie $\frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$ jest energią kinetyczną ruchu obrotowego pierwszej deski wokół środka masy, $\omega_1 = v_y/L_1$ – prędkością kątową ruchu obrotowego pierwszej deski, $I_1 = m_1 L_1^2/12$ – momentem bezwładności pierwszej deski względem jej środka masy (ponieważ długość jest znacznie większa od grubości wykorzystaliśmy tu wzór podany w treści zadania), $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{v_y}{2}\right)^2$ – energią kinetyczną ruchu środka masy pierwszej deski (uwzględniliśmy tu, że pionowa prędkość środka masy tej deski jest równa $v_y/2$), $\frac{1}{2} m_2 v_2^2$ – energią kinetyczną drugiej deski, $m_1 g d/2$ – różnicą między początkową a końcową energią potencjalną pierwszej deski (wykorzystaliśmy tu to, że dla dłuższej deski, gdy jeden koniec deski jest podniesiony o d , a drugi opiera się o stół, to środek masy jest uniesiony o $d/2$).

Uwzględniając wzory na I_1 i ω_1 , powyższą równość można przepisać w postaci

$$\frac{m_1 g d}{2} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \frac{v_y^2}{3} + \frac{1}{2} m_2 v_2^2. \quad (4)$$

Podstawiamy do powyższego równania v_1 oraz v_y wyznaczone ze wzorów (2) oraz (1):

$$v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2, \quad v_y = v_2 - v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_2. \quad (5)$$

Ostatecznie otrzymamy, że końcowa prędkość drugiej deski wynosi

$$v_2 = \sqrt{\frac{g d}{\frac{m_2^2}{m_1^2} + \frac{(m_1 + m_2)^2}{3m_1^2} + \frac{m_2}{m_1}}} = \sqrt{\frac{3g d m_1^2}{4m_2^2 + m_1^2 + 5m_1 m_2}}. \quad (6)$$

Przypadki szczególne:

Dla $m_2/m_1 \rightarrow 0$ otrzymamy

$$v_2 = \sqrt{3g d}.$$

Wynik ten jest konsekwencją faktu, że moment bezwładności pręta względem jego końca wynosi $\frac{1}{3} m l^2$.

Dla $m_2/m_1 \rightarrow \infty$ otrzymamy zgodny z oczekiwaniami (lekka deska nie jest w stanie poruszyć bardzo ciężkiej) wynik

$$v_2 = 0.$$

Punktacja zadania T1

Związek między pionową prędkością końca pierwszej deski a poziomymi prędkościami desek (wzór (1)) – 2 pkt.

Wykorzystanie zasady zachowania pędu (wzór (2)) – 2 pkt.

Zasada zachowania energii dla rozpatrywanego układu w postaci ogólnej (wzór (3)) – 2 pkt.

Uwzględnienie w zasadzie zachowania energii związków między prędkościami kątowymi i liniowymi oraz wzoru na moment bezwładności pręta (wzór (4)) – 1 pkt.

Końcowa prędkość drugiej deski (wzór (6) lub równoważny) – 3 pkt.

Rozwiązanie zadania T2

Gdy górna okładka jest przesunięta o x w stosunku do dolnej, pojemność kondensatora wynosi

$$C_x = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r (a-x)b}{d}, \quad (7)$$

a energia w nim zmagazynowana, zgodnie ze wzorem na energię kondensatora, jest równa

$$E_C = \frac{Q^2}{2C_x}. \quad (8)$$

Grawitacyjna energia potencjalna górnej okładki jest dana wzorem

$$E_g = -mgx \sin \alpha. \quad (9)$$

W stanie równowagi zmiana całkowitej energii spowodowana dodatkowym przesunięciem górnej okładki o małą wielkość Δx jest równa zero, tzn.

$$\Delta(E_g + E_C) = 0. \quad (10)$$

Uwzględniając, że Q jest stałe, oraz że dla małej zmiany $\Delta \frac{1}{C_x} = -\frac{1}{C_x^2} \Delta C_x = \frac{1}{C_x^2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r b}{d} \Delta x$, otrzymujemy

$$\left(-mg \sin \alpha + \frac{Q^2}{2C_x^2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r b}{d} \right) \Delta x = 0, \quad (11)$$

z czego wynika, że

$$-mg \sin \alpha + \frac{Q^2}{2C_x^2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r b}{d} = 0. \quad (12)$$

Przekształcając powyższe równanie otrzymujemy szukany ładunek

$$Q = C_x \sqrt{\frac{2mgd \sin \alpha}{\varepsilon_0 \varepsilon_r b}} \quad (13)$$

$$= (a-x) \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_r mgb \sin \alpha}{d}}. \quad (14)$$

Punktacja zadania T2

Pojemność kondensatora (wzór (7)) – 2 pkt.

Energia zmagazynowana w kondensatorze (wzór (8)) – 1 pkt.

Grawitacyjna energia potencjalna górnej okładki (wzór (9)) – 1 pkt.

Warunek równowagi (wzór (10) lub równoważny) – 2 pkt.

Warunek równowagi w jawnej postaci (wzór (12) lub równoważny) – 2 pkt.

Szukana pojemność kondensatora (wzór (14)) – 2 pkt.

Rozwiązanie zadania T3

a) Zgodnie ze wzorem na sprawność silnika Carnota, minimalna praca potrzebna do dostarczenia do mieszkania ciepła Q_G wynosi

$$W_C = \left(1 - \frac{T_z}{T_w}\right) Q_G, \quad (15)$$

gdzie $T_w = t_w + T_0$, $T_z = t_z + T_0$ są odpowiednimi temperaturami w skali Kelvina, a $T_0 \approx 273$ K. Zatem w przypadku idealnym szukana moc jest równa

$$P_C = \frac{t_w - t_z}{t_w + T_0} P_G \quad (16)$$

$$= 0,54 \text{ kW}. \quad (17)$$

b) Z zasady zachowania energii moc ciepła pobieranego z otoczenia wynosi

$$P_z = P_G - P_R. \quad (18)$$

Molowe ciepło właściwe powietrza przy stałym ciśnieniu (chłodzenie na zewnątrz odbywa się przy stałym ciśnieniu!) wynosi $C_p = \left(\frac{5}{2} + 1\right) R$, zatem liczba moli powietrza przepływającego w jednostce czasu przez zewnętrzny element klimatyzatora wynosi

$$n = \frac{P_z}{(t_o - t_z) C_p}. \quad (19)$$

Z równania stanu gazu doskonałego wynika, że molowa gęstość wylatującego powietrza wynosi

$$\frac{N}{V} = \frac{p_o}{RT_z}. \quad (20)$$

Zatem szukana szybkość przepływu powietrza jest równa

$$J = \frac{n}{N/V} \quad (21)$$

$$= \frac{P_G - P_R}{(t_o - t_z) \left(\frac{5}{2} + 1\right)} \frac{t_z + T_0}{p_o} \quad (22)$$

$$\approx 0,1 \text{ m}^3/\text{s}. \quad (23)$$

Punktacja zadania T3

Minimalna praca potrzebna do dostarczenia do mieszkania ciepła Q_g (wzór (15)) – 2 pkt.

Szukana moc w przypadku a) (wzór (16)) – 1 pkt.

Liczbowa wartość szukanej mocy (wzór (17)) – 1 pkt.

Wykorzystanie zasady zachowania energii (wzór (18)) – 1 pkt.

Liczba moli powietrza przepływającego w jednostce czasu przez zewnętrzny element klimatyzatora (wzór (19)) – 2 pkt.

Molowa gęstość wylatującego powietrza (wzór (20)) – 1 pkt.

Szukana szybkość przepływu powietrza (wzór (22)) – 1 pkt.

Wynik liczbowy (wzór (23)) – 1 pkt.

Rozwiązanie zadania T4 (numerycznego)

Uwaga: aby uniknąć konfliktu oznaczeń, w poniższym rozwiązaniu współrzędne końcowego położenia koralika oznaczamy przez \mathbf{x}_1 , \mathbf{y}_1 .

Równania ruchu

Interesuje nas tylko siła styczna do toru, po którym porusza się koralik.

Styczna do toru składowa siły grawitacyjnej wynosi

$$F_{gs} = -mg \frac{\Delta y}{\Delta s}. \quad (24)$$

Zgodnie ze wskazówką w treści zadania mamy

$$\frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{\Delta y}{\sqrt{1 + (y')^2} \Delta x} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}. \quad (25)$$

Zatem

$$F_{gs} = -mg \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}, \quad (26)$$

przy czym w naszym przypadku

$$y' = 2ax + b. \quad (27)$$

Siła oporu powietrza działająca na kulkę jest przeciwna do wektora prędkości, co oznacza, że jest styczna do toru. Tak więc styczna do toru składowa siły działającej na kulkę wynosi

$$F_s = F_{gs} - F_{op} \quad (28)$$

$$= -mg \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} - \beta v^2. \quad (29)$$

Zatem równanie ruchu koralika ma postać

$$ma = -mg \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} - \beta v^2, \quad (30)$$

gdzie a jest styczną do toru składową przyspieszenia koralika. Zauważmy, że prędkość koralika możemy wyrazić przez jej poziomą składową v_x

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sqrt{1 + (y')^2} v_x. \quad (31)$$

Ponieważ punkt początkowy to $x = 0$, $y = 0$, a końcowy to $x = \mathbf{x}_1$, $y = \mathbf{y}_1$, parabola, po której porusza się koralik ma postać

$$y = \left[a(x - \mathbf{x}_1) + \frac{\mathbf{y}_1}{\mathbf{x}_1} \right] x, \quad (32)$$

tzn. $c = 0$, $b = \frac{\mathbf{y}_1}{\mathbf{x}_1} - a$, natomiast a jest wolnym parametrem, który należy wyznaczyć z warunku najkrótszego spadku.

Do powyższych równań należy dodać jeszcze warunek, że w chwili początkowej koralik spoczywa

$$v(t = 0) = 0.$$

Zauważmy, że w przypadku $a = 0$, $\beta = 0$ czas spadku można wyznaczyć ściśle i wynosi on

$$T_{a=0, \beta=0} = \frac{\sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{y}_1^2}}{\sqrt{-2g\mathbf{y}_1/2}}, \quad (33)$$

gdzie $\sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{y}_1^2}$ jest drogą, $\sqrt{-2g\mathbf{y}_1}$ – prędkością końcową wyznaczoną z zasady zachowania energii, $\sqrt{-2g\mathbf{y}_1}/2$ – średnią prędkością.

Dla parametrów występujących w zadaniu mamy

$$T_{a=0, \beta=0} = 44,72 \text{ s.} \quad (34)$$

Algorytm numeryczny

W celu rozwiązania numerycznego zamieniamy $a \rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t}$, $v \rightarrow \frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{1 + (y')^2} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, otrzymując układ równań różnicowych

$$\Delta v = \left[-mg \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} - \beta v^2 \right] \Delta t,$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} \Delta x = v \Delta t.$$

gdzie, zgodnie z poprzednimi rachunkami

$$y' = 2ax + b = 2ax + \frac{\mathbf{y}_1}{\mathbf{x}_1} - a \mathbf{x}_1. \quad (35)$$

Istnieje bardzo wiele algorytmów pozwalających na numeryczne rozwiązanie rozważanego zagadnienia. W niniejszym rozwiązaniu krok dzielimy na dwie części: najpierw wyznaczamy położenie w chwili $t_n + \Delta t/2$, w tym położeniu obliczamy siłę, na jej podstawie wyznaczamy prędkość w chwili $t_n + \Delta t$, a następnie położenie w chwili $t_n + \Delta t$, zgodnie z poniższymi wzorami

$$x_{n+1/2} = x_n + \frac{v_n}{\sqrt{1 + (y'_n)^2}} \frac{\Delta t}{2} \quad (36)$$

$$v_{n+1} = v_n + \left[-g \frac{y'_{n+1/2}}{\sqrt{1 + (y'_{n+1/2})^2}} - \frac{\beta}{m} v_n^2 \right] \Delta t, \quad (37)$$

$$x_{n+1} = x_{n+1/2} + \frac{v_{n+1}}{\sqrt{1 + (y'_{n+1/2})^2}} \frac{\Delta t}{2} \quad (38)$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t, \quad (39)$$

gdzie $y'_n, y'_{n+1/2}$ jest wyliczone na dla danego $x_n, x_{n+1/2}$ przy wykorzystaniu wzoru (35).

Wyznaczanie czasu spadku dla zadanej wartości a – metoda A.

Dla ustalonej wartości a (a również $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1$ oraz g i β/m) algorytm postępowania jest następujący:

0. przyjmujemy wstępną wartość Δt .
1. przyjmujemy $x_0 = 0, v_0 = 0, t_0 = 0$
2. dla danych x_n, v_n, t_n wyznaczamy korzystając z (36 – 39) oraz (35) $x_{n+1}, v_{n+1}, t_{n+1}$
3. jeśli $x_{n+1} < \mathbf{x}_1$ oraz $v_{n+1} > 0$, to powtarzamy krok 2.; jeśli $x_{n+1} \geq \mathbf{x}_1$, to kończymy iterację i wstępnie przyjmujemy, że czas spadku dla danej wartości a wynosi $T_a = t_{n+1}$. Jeśli $x_{n+1} < \mathbf{x}_1$ oraz $v_{n+1} < 0$, kończymy iterację bez przypisywania T_a żadnej wartości.

W tym podejściu niepewność otrzymanego czasu nie może być mniejsza niż Δt . Dodatkowo sprawdzimy dokładność otrzymanych wyników zmniejszając dwukrotnie Δt i porównując wyniki z otrzymanymi poprzednio. Dodatkowo, oczekujemy, że czas otrzymany w przypadku $a = 0, \beta/m = 0$ jest zgodny w granicach oczekiwanej dokładności z wynikiem ścisłym.

Alternatywna metoda wyznaczenia czasu spadku – metoda B

Ponieważ mamy wyznaczyć czas, a sumaryczna zmiana x jest określona, wygodne wydaje się potraktowanie jako zmienną niezależną x , co prowadzi do równań

$$\Delta v = \left[-g \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} - \frac{\beta}{m} v^2 \right] \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v} \Delta x, \quad (40)$$

$$\Delta t = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v} \Delta x. \quad (41)$$

Ze względu na występowanie w powyższych wzorach v w mianowniku i to, że $v = 0$ dla $t = 0$, powyższe równania nie nadają się bezpośredniego wykorzystania. Zauważmy jednak, że $v\Delta v = \Delta \left(\frac{v^2}{2} \right)$, a zatem oznaczając $\frac{v^2}{2} = E$ można napisać następujące równania:

$$\Delta E = \left[-gy' - \frac{\beta}{m} \sqrt{1+(y')^2} v^2 \right] \Delta x, \quad (42)$$

$$v = \sqrt{2E}, \quad (43)$$

$$\Delta t = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{v} \Delta x. \quad (44)$$

Wybór oznaczenia E jest nieprzypadkowy, gdyż jest to podzielona przez m energia kinetyczna, a powyższe równania można wyprowadzić wprost z rozważań energetycznych.

W równaniu (44) nadal v występuje w mianowniku, ale nie będzie to problemem, jeśli nie będziemy wstawiali tam prędkości początkowej. Równanie iteracyjne może mieć postać

$$E_{n+1} = E_n + \left[-gy'_{n+1/2} - \frac{\beta}{m} \sqrt{1+(y'_{n+1/2})^2} v_n^2 \right] \Delta x, \quad (45)$$

$$v_{n+1} = \sqrt{2E_{n+1}}, \quad (46)$$

$$t_{n+1} = t_n + \frac{\sqrt{1+(y'_{n+1/2})^2}}{(v_{n+1} + v_n)/2} \Delta x. \quad (47)$$

Wartość $y'_{n+1/2}$ jest w powyższych równaniach wyznaczona dla $x_n + \frac{\Delta x}{2}$ przy wykorzystaniu wzoru (35).

Zauważmy, że dla $\beta = 0$ oraz stałej wartości y' powyższe równania są ściśle nawet dla dużych wartości Δx .

Wyznaczanie czasu spadku dla zadanej wartości a – metoda B

Dla ustalonej wartości a (a również \mathbf{x}_1 , \mathbf{y}_1 oraz g i β/m) algorytm postępowania jest następujący:

0. przyjmujemy wstępną liczbę przedziałów N na które dzielimy przedział $[0, \mathbf{x}_1]$ i wyznaczamy $\Delta x = \frac{\mathbf{x}_1}{N}$

1. przyjmujemy $v_0 = 0, E_0 = 0, t_0 = 0$
2. dla danych v_n, E_n, t_n wyznaczamy $v_{n+1}, E_{n+1}, t_{n+1}$ korzystając z (45 – 47) oraz (35)
3. powtarzamy krok 2. N razy i wstępnie przyjmujemy, że czas spadku dla danej wartości a wynosi $T_a = t_N$.

Podobnie jak w metodzie A dokładność otrzymanych wyników oszacujemy zmniejszając dwukrotnie Δt i porównując wyniki z otrzymanymi poprzednio. Sprawdzamy również, czy czas otrzymany w przypadku $a = 0, \beta/m = 0$ jest w granicach oczekiwanej dokładności zgodny z wynikiem ścisłym.

Wyznaczanie wartości a odpowiadającej najkrótszemu czasowi spadku

Wartość a odpowiadającą najkrótszemu spadkowi wyznaczono w następujący sposób:

- wstępnie przyjęto minimalną a_{\min} oraz maksymalną a_{\max} wartość parametru a
- ten zakres podzielono na N_p równych przedziałów
- dla każdej z wartości $a = a_{\min} + k \cdot \Delta a$, gdzie $\Delta a = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{N_p}$, $k = 0, 1, \dots, N_p$, wyznaczono czas spadku T_a .

Spośród otrzymanych czasów T_a wybrano najkrótszy, który oznaczamy jako t_{naj} , oraz odpowiadającą mu wartość a , którą oznaczamy jako a_{naj} . Dodatkowo wybrano najkrótszy czas spośród czasów większych od t_{naj} , który oznaczamy jako $t_{\text{p-naj}}$ (prawie najkrótszy czas)

Wartości parametrów a , dla których koralik nie dolatuje do końca toru, nie są brane pod uwagę.

Implementacja algorytmu

Programy w C++ oraz w Logo działające zgodnie z powyższymi algorytmami są dołączone do rozwiązania dostępnego na stronie KGOF.

Programy te wykorzystują procedury: procedura **krok** odpowiada krokowi opisanemu równaniami (36–39) lub równaniami (45–47). Procedura **ruch** powtarza kroki do momentu, aż x osiągnie lub przekroczy wartość \mathbf{x}_1 ($= 100$ m) lub prędkość (albo energia E w metodzie B) stanie się ujemna. Procedura **najkrotszyCzas** powtarza procedurę **ruch** zgodnie z opisem w punkcie *Wyznaczanie wartości a odpowiadającej najkrótszemu czasowi spadku*. Po każdym wywołaniu procedury **ruch** sprawdzane jest, czy otrzymany czas ruchu t jest mniejszy lub równy dotychczasowemu najkrótszemu czasowi zapamiętanemu w zmiennej **tnaj**. Jeśli jest krótszy, **tnaj** przyjmuje nową wartość **t**. Jednocześnie zmienne **anajmin** oraz **anajmax** odpowiadające minimalnej i maksymalnej wartości a dla najkrótszego czasu przyjmują aktualną wartość zmiennej **a** odpowiadającej parametrowi a . Jeśli **tnaj** jest równe **t**, odpowiednio modyfikowane są wartości zmiennych **anajmin** oraz **anajmax**.

Potrzebne do rozwiązania zagadnienia wartości zmiennych są zapisywane do pliku lub wyświetlane na ekranie.

Obliczenia numeryczne

Jako wstępną wartość kroku czasowego przyjęto 0,1 s. Otrzymane wyniki przedstawia poniższa tabela. Ponieważ występujące w niej wartości a są dość małe, przedstawiono $a \cdot \mathbf{x}_1 = a \cdot 100$ m. Gdy najkrótszy czasowi odpowiada wielu wartościom a , przedstawiono cały ich zakres.

Tabela 1. Minimalny czas dla $\Delta t = 0,1$, $a_{\min} = 0$, $a_{\max} \cdot \mathbf{x}_1 = 5$, $\Delta a \cdot \mathbf{x}_1 = 0,05$ otrzymany metodą A (opis oznaczeń jest w punkcie *Wyznaczanie wartości a odpowiadającej najkrótszemu czasowi spadku*)

β/m (1/m)	t_{naj} (s)	$a_{\text{naj}} \cdot \mathbf{x}_1$	$t_{\text{p-naj}}$ (s)	$t_{a=0}$ (s)
0	7,70	1,25 ÷ 1,90	7,80	44,80
0,0001	7,80	1,30 ÷ 1,70	7,90	44,80
0,001	13,60	0,25	14,60	45,50
0,01	52,40	0		52,40

W powyższej tabeli nie ma wartości $t_{\text{p-naj}}$ oraz $a_{\text{p-naj}}$ dla $\beta/m = 0,01 \frac{1}{\text{m}}$, gdyż już dla $a \cdot \mathbf{x}_1 = 0,05$ koralik zatrzymywał się przed dolecaniem do $x = \mathbf{x}_1$. Za wyjątkiem przypadku tego właśnie przypadku, minimalne czasy odpowiadają $a \cdot \mathbf{x}_1$ znajdującym się wewnątrz przedziału $[0, 5]$, zatem nie ma potrzeby jego rozszerzenia.

Czas dla $\beta/m = 0$, $a = 0$ jest zgodny z wynikiem (34) otrzymanym ze ścisłego wzoru. Żeby sprawdzić wiarygodność wyników dla $\beta/m \neq 0$, powtórzono obliczenia dla $\Delta t = 0,05$ s oraz dla $\Delta t = 0,02$ s.

Tabela 2. Minimalny czas dla $\Delta t = 0,05$ s, $a_{\min} = 0$, $a_{\max} \cdot \mathbf{x}_1 = 5$, $\Delta a \cdot \mathbf{x}_1 = 0,05$ otrzymany metodą A.

β/m (1/m)	t_{naj} (s)	$a_{\text{naj}} \cdot \mathbf{x}_1$	$t_{\text{p-naj}}$ (s)	$t_{a=0}$ (s)
0	7,70	1,30 ÷ 1,75	7,75	44,75
0,0001	7,85	1,25 ÷ 1,65	7,90	44,80
0,001	13,55	0,25	14,60	45,50
0,01	52,45	0		52,45

Tabela 3. Minimalny czas dla $\Delta t = 0,02$ s, $a_{\min} = 0$, $a_{\max} \cdot \mathbf{x}_1 = 5$, $\Delta a \cdot \mathbf{x}_1 = 0,05$ otrzymany metodą A.

β/m (1/m)	t_{naj} (s)	$a_{\text{naj}} \cdot \mathbf{x}_1$	$t_{\text{p-naj}}$ (s)	$t_{a=0}$ (s)
0	7,68	1,45 ÷ 1,50	7,70	44,74
0,0001	7,86	1,30 ÷ 1,55	7,88	44,80
0,001	13,56	0,25	14,60	45,48
0,01	52,42	0		52,42

Powyższe rezultaty oznaczają, że przyjęta metoda wyznaczania czasu spadku dla zadanego a daje wystarczającą dokładność dla $\Delta t = 0,05$. Jednak w przypadkach $\beta/m = 0,01$ oraz $\beta/m = 0,001$ wartość kroku Δa jest za mała. W związku z tym przeprowadzono kolejne obliczenia, z wynikami przedstawionymi w poniższej tabeli

Tabela 4. Minimalny czas dla $\Delta t = 0,02$ s, $\Delta a \cdot \mathbf{x}_1 = 0,001$ lub $0,0005$ otrzymany metodą A.

β/m (1/m)	t_{naj} (s)	$a_{\text{naj}} \cdot \mathbf{x}_1$	$t_{\text{p-naj}}$ (s)	$\Delta a \cdot \mathbf{x}_1$
0,001	13,06	0,292 ÷ 0,293	13,08	0,001
0,01	38,42	0,0270 ÷ 0,0275	38,44	0,0005

Tabela 5. Minimalny czas dla $\Delta t = 0,01$ s, $\Delta a \cdot \mathbf{x}_1 = 0,001$ lub $0,0005$ otrzymany metodą A.

β/m (1/m)	t_{naj} (s)	$a_{\text{naj}} \cdot \mathbf{x}_1$	$t_{\text{p-naj}}$ (s)	$\Delta a \cdot \mathbf{x}_1$
0,001	13,07	0,290 ÷ 0,295	13,10	0,001
0,01	38,42	0,0270 ÷ 0,0275	38,43	0,0005

Wyniki i ich dyskusja

Na podstawie powyższych rezultatów można przyjąć, że szukane minimalne czasy oraz odpowiadające wartości parametru a są następujące

Tabela 6. Minimalne czasy oraz odpowiadające im wartości parametru a . Przedstawiono również czas ruchu po prostej $t_{a=0}$.

β/m (1/m)	t_{naj} (s)	a_{naj} (1/m)	$t_{a=0}$ (s)
0	$7,7 \pm 0,2$	$0,015 \pm 0,002$	$44,8 \pm 0,2$
0,0001	$7,9 \pm 0,2$	$0,014 \pm 0,002$	$44,8 \pm 0,2$
0,001	$13,1 \pm 0,2$	$0,0029 \pm 0,0002$	$45,5 \pm 0,2$
0,01	$38,4 \pm 0,2$	$0,00027 \pm 0,00002$	$52,4 \pm 0,2$

Dla wartości $\beta/m = 0$; $0,0001 \frac{1}{\text{m}}$ czas ruchu po torze optymalnym jest znacząco różny od czasu odpowiadającego ruchowi po prostej. Wpływ siły oporu w przypadku $\beta/m = 0,0001 \frac{1}{\text{m}}$ jest mały. W przypadku $\beta/m = 0,001 \frac{1}{\text{m}}$ czas najkrótszego spadku jest już istotnie większy niż w przypadku braku oporu, a parabola znacznie bardziej zbliżona do prostej. Jest to związane z faktem, że siła oporu szybko rośnie ze wzrostem prędkości, co powoduje dla torów o większym a koralik po prostu nie doleci do punktu końcowego. Jest to szczególnie widoczne w przypadku $\beta/m = 0,01 \frac{1}{\text{m}}$: optymalny tor jest to bardzo zbliżony do prostej, choć nadal „zysk” z tego, że nie jest to prosta, jest zauważalny. Ciekawe w powyższych wynikach jest to, że o ile czasy najkrótszego spadku w przypadkach $\beta/m \geq$

$0,001\frac{1}{m}$ istotnie zależą od β/m , to jednak zależność czasu spadku po prostej od β/m jest znacznie mniejsza.

Punktacja zadania T4 (numerycznego)

Równanie ruchu koralika (wzór (30) lub równoważny) wraz z warunkami początkowymi oraz wyznaczenie pochodnej y' (wzór (27)) i wyznaczenie parametrów b oraz c paraboli – 2 pkt.

Układ równań różnicowych lub rekurencyjnych pozwalający na numeryczne wyznaczenie czasu dla danego toru oraz opis algorytmu i podanie sposobu jego implementacji – 2 pkt.

Przedstawienie algorytmu wyznaczenia czasu najkrótszego spadku – 1 pkt.

Podanie sposobu zagwarantowania lub sprawdzenia właściwej dokładności wyników – 1 pkt.

Czasy najkrótszego spadku wraz z odpowiadającymi im wartościami parametru a oraz czasy ruchu po prostej zgodne z podanymi w Tabeli 6. (wraz z podaniem niepewności wyników) – 3 pkt. Gdy zgodność z wynikami z Tabeli 6. jest tylko dla dwóch wartości β/m – 1 pkt, gdy dla trzech – 2 pkt.

Jakościowe omówienie otrzymanych wyników – 1 pkt.